

Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

Математика, 10 класс, 2018 год

1. В нескольких пакетах лежат 20 конфет, причём нет двух пакетов с одинаковым числом конфет и нет пустых пакетов. При этом некоторые пакеты могут лежать в других пакетах (тогда считается, что конфета, лежащая во внутреннем пакете, лежит и во внешнем). Но запрещено делать так, чтобы в каком-то пакете лежал пакет с пакетом внутри. Каково максимально возможное количество пакетов?

2. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y} + \frac{yz}{x}\right) \left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}\right),$$

где x, y, z — ненулевые вещественные числа.

3. Все углы выпуклого восьмиугольника равны, а все стороны имеют рациональную длину. Докажите, что у него есть центр симметрии.

4. Петя и Вася играют в игру. У них есть полоска из 10 клеток. Каждым ходом игрок вписывает любую цифру в любую свободную клетку. Однако ходят они не по очереди. Сначала Петя делает столько ходов, сколько захочет (но меньше 10); потом он просит Васю сделать один ход; после этого Петя делает все оставшиеся ходы. Петя выигрывает, если результирующее число окажется точным квадратом; в противном случае выигрывает Вася. При этом они считают, что число может начинаться с одного или нескольких нулей. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

5. Пусть все углы треугольника ABC меньше 120° и $AB \neq AC$. Рассмотрим точку T внутри треугольника, для которой $\angle BTC = \angle CTA = \angle ATB = 120^\circ$. Пусть прямая BT пересекает сторону AC в точке E , а прямая CT пересекает сторону AB в точке F . Докажите, что прямые EF и BC пересекаются в некоторой точке M , причём $MB : MC = TB : TC$.