

Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

Математика, 8 класс, 2016 год

1. Существуют ли три таких различных цифры A, B, C , что $\overline{ABC}, \overline{CBA}, \overline{CAB}$ — квадраты натуральных чисел? (Черта над цифрами означает число, составленное из этих цифр в указанном порядке.)

2. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Какое максимальное количество равновесных клеток может оказаться на доске? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = AN$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O , причём $BO = CO$. Докажите, что ABC равнобедренный.

4. На тетрадном листе обведены два прямоугольника. У первого прямоугольника вертикальная сторона короче горизонтальной, а у второго — наоборот. Найдите максимально возможную площадь их общей части, если каждый прямоугольник содержит больше 2010, но меньше 2020 клеток.

5. В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел образует сет, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.

Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет (в первом порядке встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры). А числа 1123, 2231, 3311 не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).

Сколько всего сетов существует в игре?

(Перестановка чисел не приводит к образованию нового сета: 1232, 2213, 3221 и 2213, 1232, 3221 — один и тот же сет.)