

Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

Математика, 11 класс, 2016 год

1. Каждая клетка доски 1000×1000 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Можно ли раскрасить доску так, чтобы на ней было более 600000 синих равновесных клеток? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

2. Найдите все натуральные числа n , для которых $2^n + n^{2016}$ — простое число.

3. В трёхмерном пространстве задана стандартная система координат. Найдите площадь множества точек, удовлетворяющих следующим условиям: $x^2 + y^2 = 5$, $|x - y| < 1$, $|y - z| < 1$.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ внутри треугольника ADC выбрана точка E , причём $\angle BAE = \angle BEA = 80^\circ$, $\angle CAD = \angle CDA = 80^\circ$, $\angle EAD = \angle EDA = 50^\circ$. Докажите, что $\triangle BEC$ равносторонний.

5. В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел *образует сет*, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.

Сложностью сета будем называть количество таких разрядов, где все три цифры различны.

Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет сложности 3 (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры); числа 1231, 1232, 1233 — сет сложности 1 (в первых трёх разрядах цифры совпадают, и только в четвёртом все цифры различны). А числа 1123, 2231, 3311 вообще не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).

Сетов какой сложности в игре больше всего и почему?