Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Региональный этап, 2022/23 год

Первый день

1. Два бегуна бегают с равными постоянными скоростями по диагоналям AC и BD соответственно квадрата $ABCD$. Добежав до конца диагонали, бегун сразу поворачивает обратно. Стартовали они одновременно из двух случайно выбранных точек своих диагоналей. Докажите, что найдётся момент, когда расстояние между бегунами будет **строго** меньше половины диагонали квадрата.

2. Пусть p_1, p_2, …, p_{100} — сто простых чисел, среди которых нет одинаковых. Натуральные числа a_1, …, a_k, большие 1, таковы, что каждое из чисел $p_1p_2^3$, $p_2p_3^3$, …, $p_{99}p_{100}^3$, $p_{100}p_1^3$ равно произведению каких-то двух из чисел a_1, …, a_k. Докажите, что $k \geqslant 150$.

3. В клетках таблицы 10×10 расставлены натуральные числа 1, 2, …, 99, 100. Назовём **уголком** фигуру, которая получается удалением одной клетки из квадрата 2×2. Назовем уголок **хорошим**, если число в его клетке, граничащей по сторонам с двумя другими, больше чисел, стоящих в этих двух других клетках. Каково наибольшее возможное число хороших уголков? (Каждый уголок учитывается независимо от того, как он расположен по отношению к другим, разные уголки могут частично накладываться.)

4. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка E. Биссектриса AL пересекает отрезок BE в точке X. Оказалось, что $AX = XE$ и $AL = BX$. Чему равно отношение углов A и B треугольника?

5. По кругу расставлено 99 положительных чисел. Оказалось, что для любых четырех стоящих подряд чисел сумма двух первых из них по часовой стрелке равна произведению двух последних из них по часовой стрелке. Чему может быть равна сумма всех 99 расставленных чисел?

Второй день

6. Можно ли число 240 представить в виде суммы девяти двузначных чисел (среди которых могут быть и одинаковые), в десятичной записи каждого из которых есть девятка?

7. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E, лежащая на биссектрисе угла A, и точка F, лежащая на биссектрисе угла C. Известно, что середина отрезка BF лежит на отрезке AE. Докажите, что середина отрезка DE лежит на прямой CF.

8. Назовем два числа **почти равными** друг другу, если они равны друг другу или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Клетчатый прямоугольник со сторонами, равными натуральным числам a и b, таков, что из него нельзя по линиям сетки вырезать прямоугольник, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника. Какое наименьшее значение может принимать число $|a-b|$?

9. Будем говорить, что мы **укоротили** число, если стерли его последнюю цифру. Натуральное число, большее миллиона, таково, что если укоротить его, получится квадрат натурального числа, если укоротить этот квадрат, получится куб натурального числа, укоротив этот куб, получим четвёртую степень натурального числа, а, укоротив эту четвёртую степень, получим пятую степень натурального числа. Докажите, что если укоротить эту пятую степень, то получится шестая степень натурального числа.

10. На столе есть две кучки камней, в которых соответственно 100 и 101 камень. Двое играют в игру, делая ходы по очереди. За ход разрешается взять кучку, убрать из неё какое-то количество камней (хотя бы один) и разбить оставшиеся в этой кучке камни на две непустые кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его соперник?