# Олимпиада им. Леонарда Эйлера

## Региональный этап, 2021/22 год

**Первый день**

**1.** Как без остатка разрезать клетчатый квадрат размером $8 \times 8$ клеточек на 10 клетчатых прямоугольников, чтобы все прямоугольники имели различные площади? Все разрезы должны проходить по границам клеточек.

**2.** Учитель придумал ребус, заменив в примере $a + b = c$ на сложение двух натуральных чисел цифры буквами: одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные -— разными. (например, если $a = 23$, а $b = 528$, то $c = 551$, и получился, с точностью до выбора букв, ребус $АБ+ВАГ = ВВД$). Оказалось, что по получившемуся ребусу однозначно восстанавливается исходный пример. Найдите наименьшее возможное значение суммы $c$.

**3.** В треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $BK$ и $CL$. На отрезке $BK$ отмечена точка $N$ так, что $LN \parallel AC$. Оказалось, что $NK = LN$. Найдите величину угла $ABC$.

**4.** Числа 1, 2, $\ldots$, 1000 разбили на два множества по 500 чисел: красные $k_1$, $k_2$, $\ldots$, $k_{500}$ и синие $s_1$, $s_2$, $\ldots$, $s_{500}$. Докажите, что количество таких пар $m$ и $n$, у которых разность $k_m - s_n$ дает остаток 7 при делении на 100, равно количеству таких пар $m$ и $n$, у которых разность $s_n - k_m$ дает остаток 7 при делении на 100. Здесь рассматриваются все возможные разности, в том числе и отрицательные.

Напомним, что остатком от деления целого числа $a$ на 100 называется разность между числом $a$ и ближайшим числом, не большим $a$ и делящимся на 100. Например, остаток от деления числа 2022 на 100 равен $2022 - 2000 = 22$, а остаток от деления числа $-11$ на 100 равен $-11 - (-100) = 89$.

**5.** При каком наибольшем $n$ существует выпуклый $n$-угольник, у которого длины диагоналей принимают не больше двух различных значений?

**Второй день**

**6.** Сумма остатков от деления трёх последовательных натуральных чисел на 2022 — простое число. Докажите, что одно из чисел делится на 2022.

**7.** Существует ли треугольник, у которого длины не совпадающих между собой медианы и высоты, проведенных из одной его вершины, соответственно равны длинам двух сторон этого треугольника?

**8.** Будем называть натуральное число **красивым**, если в его десятичной записи поровну цифр 0, 1, 2, а других цифр нет. Может ли произведение двух красивых чисел быть красивым?

**9.** Петя и Вася написали на доске по 100 различных натуральных чисел. Петя поделил все свои числа на Васины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Вася поделил все свои числа на Петины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Оказалось, что наборы выписанных Васей и Петей остатков совпадают. Докажите, что тогда и наборы их исходных чисел совпадают.

**10.** В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера $1, 2, \ldots, 100$, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на $k$. При каком наименьшем $k$ серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке по отношению к своему начальному положению?