Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Финал, 2020/21 год

Первый день

1. Прямые $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + d$, $y = dx + a$ ограничивают квадрат. Чему может равняться площадь этого квадрата (укажите все возможности)?

2. Кощей Бессмертный открыл счет в банке «Спёрбанк». Изначально на счете было 0 рублей. В первый день Кощей кладёт на счёт k ($k > 0$) рублей, а каждый следующий день добавляет туда на один рубль больше, чем накануне (на второй день он добавляет $k + 1$ рублей, на третий — $k + 2$ рубля и т. д.) Каждый раз сразу после того, как Кощей вносит деньги на счёт, общая величина счёта уменьшается банком в два раза. Найдите все такие k, при которых сумма на счёте всегда будет выражаться целым числом рублей.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно. Отрезки CP и AQ пересекаются в точке R. Оказалось, что $AR = CR = PR + QR$. Докажите, что из отрезков AP, CQ и PQ можно составить треугольник, один из углов которого равен углу B.

4. Несколько команд сыграли турнир в один круг, причём ничьих не было. Оказалось, что среди любых 100 команд есть команда, выигравшая у всех остальных 99 команд, но нет команды, проигравшей всем остальным 99 командам. Какое наибольшее число команд могло участвовать в турнире?

Второй день

5. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке K. Внутри треугольника ABK нашлась такая точка M, что $\angle MBC = \angle MAD$, $\angle MCB = \angle MDA$. Докажите, что прямая MK параллельна основаниям трапеции.

6. Петя, Вася и Толя вернулись с рыбалки, на которой каждый из них поймал некоторое количество рыб (хотя бы одну). После рыбалки они стали хвастаться своими уловами. Петя сказал: «Я поймал рыб не меньше, чем каждый из остальных!». Вася сказал: «Я поймал рыб не меньше, чем Петя и Толя в сумме!». Толя сказал: «Я поймал на 25% больше рыб, чем Вася!». Позже выяснилось, что каждый из ребят преувеличил свой улов не более, чем в a раз. Какое наименьшее значение могло принимать число a?

7. При каких натуральных n можно так отметить несколько клеток доски $n \times n$, чтобы во всех строках и столбцах было чётное число отмеченных клеток, а на всех $4n - 6$ диагоналях, длина которых больше одной клетки, — нечётное?

8. Дано натуральное число n. За одну операцию можно либо вычесть из имеющегося числа любое натуральное число, меньшее его наименьшего простого делителя, либо разделить его на его наименьший простой делитель. Существует ли такое составное n, что из него нельзя получить простое число менее, чем за 2021 операцию?