Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Региональный этап, 2020/21 год

Первый день

1. Натуральное число, большее 1000000, даёт одинаковые остатки при делении на 40 и на 125. Какая цифра может стоять у этого числа в разряде сотен?

2. Числа x и y, не равные 0, удовлетворяют неравенствам $x^2 - x > y^2$ и $y^2 - y > x^2$. Какой знак может иметь произведение xy (укажите все возможности)?

3. В группе из 79 школьников у каждого не более 39 знакомых, причем у любого мальчика есть знакомая девочка, а у любой девочки — знакомый мальчик. Может ли оказаться, что все девочки из этой группы имеют в ней поровну знакомых мальчиков, а все мальчики — поровну знакомых девочек? Все знакомства — взаимные.

4. Петя и Вася играют в игру. Вася кладёт в ряд 150 монет: некоторые «орлом» вверх, некоторые — «решкой». Петя своим ходом может показать на любые три лежащие подряд монеты, после чего Вася обязан перевернуть какие-то две монеты из этих трёх по своему выбору. Петя хочет, чтобы как можно больше монет лежали «решкой» вверх, а Вася хочет ему помешать. При каком наибольшем k Петя сможет независимо от действий Васи добиться того, чтобы хотя бы k монет лежали «решкой» вверх?

5. CL — биссектриса треугольника ABC. $CLBK$ — параллелограмм. Прямая AK пересекает отрезок CL в точке P. Оказалось, что точка P равноудалена от диагоналей параллелограмма $CLBK$. Докажите, что $AK \geqslant CL$.

Второй день

6. У уголка из трёх клеток *центральной* назовём клетку, соседнюю по стороне с двумя другими. Существует ли клетчатая фигура, которую можно разбить на уголки из трех клеток тремя способами так, чтобы каждая ее клетка в одном из разбиений была центральной в своем уголке?

7. Точка M — середина стороны AC равностороннего треугольника ABC. Точки P и R на отрезках AM и BC соответственно выбраны так, что $AP = BR$. Найдите сумму углов ARM, PBM и BMR.

8. Сначала Саша прямолинейными разрезами, каждый из которых соединяет две точки на сторонах квадрата, делит квадрат со стороной 2 на 2020 частей. Затем Дима вырезает из каждой части по кругу. Докажите, что Дима всегда может добиться того, чтобы сумма радиусов этих кругов была не меньше 1.

9. Дано натуральное число n, большее 2. Докажите, что если число $n! + n^3 + 1$ — простое, то число $n^2 + 2$ представляется в виде суммы двух простых чисел.

10. В квадратной таблице 2021×2021 стоят натуральные числа. Можно выбрать любой столбец или любую строку в таблице и выполнить одно из следующих действий:

1) прибавить к каждому выбранному числу 1;

2) разделить каждое из выбранных чисел на какое-нибудь натуральное число.

Можно ли за несколько таких действий добиться того, чтобы каждое число в таблице было равно 1?