

## Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Региональный этап, 2019/20 год

### Первый день

1. Сумму цифр шестизначного числа умножили на произведение его цифр. Получилось 390. Найдите хотя бы одно такое шестизначное число.
2. На доске написано  $n$  целых чисел, любые два из которых отличаются хотя бы на 3. Сумма квадратов двух наибольших из них меньше 500. Сумма квадратов двух наименьших из них также меньше 500. При каком наибольшем  $n$  это возможно?
3. Биссектриса угла  $A$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  пересекает сторону  $CD$  в точке  $K$ . Оказалось, что  $DK = BC$  и  $KC + AB = AD$ . Докажите, что  $\angle BCD = \angle ADC$ .
4. На полуокружности расположены 50 точек. Любые две точки, между которыми не более 9 других точек, соединены отрезком. *Степенью точки* назовём количество отрезков, выходящих из неё. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. Панда своим ходом может стереть один отрезок, соединяющий точки, сумма степеней которых чётна. Вомбат может своим ходом стереть один отрезок, соединяющий точки, сумма степеней которых нечётна. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из зверей выиграет при правильной игре?
5. Замкнутая ломаная состоит из 1001 звена и такова, что никакие три её вершины не лежат на одной прямой. Известно, что каждое её звено, кроме, может быть, двух, пересекает все 998 звеньев, не имеющих с ним общих концов. Верно ли, что каждое из двух оставшихся звеньев тоже пересекает все 998 звеньев, не имеющих с ним общих концов?

## Второй день

6. Петя и Вася стартуют по круговой дорожке из одной точки в направлении против часовой стрелки. Оба бегут с постоянными скоростями, скорость Васи вдвое больше скорости Пети. Петя всё время бежит против часовой стрелки, а Вася может менять направление бега, если он перед этим пробежал полкруга или больше в одном направлении. Покажите, что пока Петя бежит первый круг, Вася может трижды, не считая момента старта, поравняться (встретиться или догнать) с ним.

7. Зелёный хамелеон всегда говорит правду, а коричневый хамелеон врёт, после чего зеленеет. В компании из 2019 хамелеонов каждый по очереди ответил на вопрос, сколько среди них сейчас зелёных. Ответами были числа  $1, 2, 3, \dots, 2019$  (в некотором порядке, не обязательно в указанном выше). Какое наибольшее число зелёных хамелеонов могло быть изначально?

8. Можно ли отметить в ряду всех натуральных чисел бесконечно много чисел так, чтобы разность любых двух отмеченных чисел (где из большего вычитается меньшее) была квадратом натурального числа?

9. В строку выписано 1999 натуральных чисел. Во вторую строку под каждыми двумя соседними числами выписали их наибольший общий делитель. Аналогичным образом получили третью, четвёртую и т. д. строки. Может ли 1000-я строка состоять из 1000 последовательных чисел в некотором порядке?

10. На средней линии равностороннего треугольника  $ABC$ , параллельной стороне  $BC$ , взята точка  $D$ . Точка  $E$  на продолжении стороны  $BA$  за точку  $A$  такова, что  $\angle ECA = \angle DCA$ . Точка  $F$  на продолжении стороны  $CA$  за точку  $A$  такова, что  $\angle FBA = \angle DBA$ . Докажите, что точка  $A$  лежит на средней линии треугольника  $DEF$ , параллельной стороне  $EF$ .