Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Финал, 2018/19 год

Первый день

1. Даны два числа (не обязательно целые), не равные 0. Если каждое из них увеличить на единицу, их произведение увеличится вдвое. А во сколько раз увеличится их произведение, если каждое из исходных чисел возвести в квадрат и затем уменьшить на единицу?

2. Устройство `КК42` работает так: если положить в него четыре шарика, то в первый лоток вывалится второй по весу шарик (т. е. шарик веса b, если $a > b > c > d$), а во второй лоток вывалятся остальные. С другим числом шариков устройство не работает. Имеются 100 одинаковых на вид шариков попарно различных весов. Их пронумеровали числами $1, 2, \ldots, 100$. Как, использовав прибор не более 100 раз, найти самый тяжелый шарик?

3. Дано 1000-значное число без нулей в записи. Докажите, что из этого числа можно вычеркнуть несколько (возможно, ни одной) последних цифр так, чтобы получившееся число не было натуральной степенью числа, меньшего 500.

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABSC$. На диагонали BC выбрана точка P так, что $AP = CP > BP$. Точка Q симметрична точке P относительно середины диагонали BC, а точка R симметрична точке Q относительно прямой AC. Оказалось, что $\angle SAB = \angle QAC$ и $\angle SBC = \angle BAC$. Докажите, что $SA = SR$.

Второй день

5. Графики линейных функций $y = ax + c$, $y = ax + d$, $y = bx + e$, $y = bx + f$ пересекаются в вершинах квадрата P. Могут ли точки $K(a, c)$, $L(a, d)$, $M(b, e)$, $N(b, f)$ располагаться в вершинах квадрата, равного квадрату P?

6. Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно треугольника ABC. На продолжении отрезка CM за точку M отмечена точка D. Оказалось, что $BC = BD = 2$ и $AN = 3$. Докажите, что $\angle ADC = 90°$.

7. На доске написаны числа 1, 2, …, 1000. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них числа ab и $a^2 + b^2$. Можно ли такими операциями добиться, чтобы среди чисел, написанных на доске, было хотя бы 700 одинаковых?

8. Дано натуральное число k. В городе несколько детей, они ходят в несколько кружков. Известно, что в каждый кружок ходит не более $3k$ детей, любой ребёнок ходит ровно в три кружка, и для любых двух детей есть кружок, в которой оба они ходят. Какое наибольшее количество детей может быть в городе?