Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Региональный этап, 2018/19 год

Первый день

1. Операция *удвоения цифры* натурального числа состоит в умножении этой цифры на 2 (если это произведение оказывается двузначным, то цифра в следующем разряде числа увеличивается на 1, как при сложении «в столбик»). Например из числа 9817 удвоениями цифр 7, 1, 8 и 9 можно получить числа 9824, 9827, 10617 и 18817 соответственно. Можно ли из числа $22\ldots22$ (20 двоек) несколькими такими операциями получить число $22\ldots22$ (21 двойка)?

2. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то натуральное число. Затем первый сказал: «Моё число больше 1», второй сказал: «Мое число больше 2», …, десятый сказал: «Мое число больше 10». После этого они же, выступая в другом порядке, сказали (каждый по одной фразе): «Мое число меньше 1», «Мое число меньше 2», …, «Мое число меньше 10». Какое наибольшее число рыцарей могло быть среди этих 10 человек?

3. По кругу расставлены 100 натуральных чисел. Каждое из них разделили с остатком на следующее по часовой стрелке. Могло ли получиться 100 одинаковых ненулевых остатков?

4. Имеется кубик, каждая грань которого разбита на 4 одинаковые квадратные клетки. Олег хочет отметить невидимыми чернилами 8 клеток так, чтобы никакие две отмеченные клетки не имели общей стороны. У Рустема есть детекторы. Если детектор помещен в клетку, чернила на ней делаются видимыми. Какое наименьшее число детекторов Рустем может поместить в клетки так, чтобы, какие бы клетки после этого Олег ни отметил, можно было определить все отмеченные клетки?

5. Периметр треугольника ABC равен 2. На стороне AC отмечена точка P, а на отрезке CP — точка Q так, что $2AP = AB$ и $2QC = BC$. Докажите, что периметр треугольника BPQ больше 1.

Второй день

6. Сумма четырех целых чисел равна 0. Числа расставили по кругу и каждое умножили на сумму двух его соседей. Докажите, что сумма этих четырех произведений, умноженная на -1, равна удвоенному квадрату целого числа.

7. Будем называть две клетки клетчатой таблицы *соседями*, если у них есть общая сторона. Можно ли покрасить в белой таблице размером 10×10 клеток 32 клетки в черный цвет так, чтобы у каждой клетки было поровну черных и белых соседей, а у каждой белой клетки — не поровну?

8. Точка N — середина стороны BC треугольника ABC, в котором $\angle ACB = 60°$. Точка M на стороне AC такова, что $AM = BN$. Точка K — середина отрезка BM. Докажите, что $AK = KC$.

9. Имеется 70 переключателей и 15 ламп. Каждая лампа соединена с 35 переключателями. Никакие два переключателя не соединены с одним и тем же набором ламп. Нажатие на переключатель меняет состояние всех ламп, с которыми он соединён (включённые выключает и наоборот). Изначально все лампы выключены. Докажите, что можно нажать на какие-то 19 переключателей таким образом, чтобы включилось не менее восьми ламп.

10. Петя выбирает такие неотрицательные числа x_1, x_2, $\ldots$, x_{11}, что их сумма равна 1. Вася расставляет их в ряд по своему усмотрению, считает произведения соседних чисел и выписывает на доску наибольшее из получившихся десяти произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, Вася хочет, чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при наилучшей игре Пети и Васи?