

Олимпиада «Надежда энергетики» по математике

10 класс, 2022 год

1. Энергетические затраты Сиропчика во время еды пропорциональны кубу объема съедаемой порции. Что выгоднее для экономии энергетического запаса: съесть бидончик мороженого как одну порцию или разделить его на две? В какое максимальное количество раз (и в какую сторону) изменятся затраты при разделении на две порции?

Уменьшится в 4 раза (максимально); выгодно съесть как две порции

2. На каждой из сторон прямоугольника выбрано по произвольной точке. Точки на соседних сторонах прямоугольника соединены отрезками прямых. В результате от прямоугольника оказываются отсеченными четыре треугольника. Вокруг каждого из этих треугольников описана окружность. Докажите, что центры этих окружностей являются вершинами некоторого параллелограмма.

3. Найдите все целочисленные решения данного уравнения, если таковые существуют.

$$\left[\frac{x}{2022} \right] + \left[\frac{x+1}{2022} \right] + \dots + \left[\frac{x+2021}{2022} \right] = x^{2022} - x^{2021}.$$

Через $[a]$ здесь обозначена целая часть числа a .

$0 = x$

4. Охотник Пулька для своей собаки Бульки заказал на АлиЭкспресс три куля собачьего корма. Наутро после доставки один куль оказался съеден. Под подозрение попали четверо, и Незнайке удалось установить следующее.

1. Если алиби Пончика истинно, то Сиропчик также имеет алиби.
2. Если Пончик ел корм, то либо Сиропчик, либо Авоська тоже ел корм (либо оба вместе).
3. Из двух показаний: «Авоська ел корм», «Пончик не ел, но при этом ел Небоська» — хотя бы одно истинное.
4. Если Небоська ел корм, то также ел либо Авоська, либо Сиропчик (либо оба вместе).

Кого из подозреваемых Незнайка может гарантированно обвинить в поедании за ночь целого куля собачьего корма?

Авоська точно ел, про остальных сказать нельзя

5. Будем говорить, что функции $f(t)$ и $F(x, y)$ образуют «пару рассеянных собеседников», если для всех допустимых чисел x, y выполняется условие

$$f(F(x, y)) = F(f(x), f(y)).$$

1. Приведите пример пары рассеянных собеседников.
2. Выясните, существует ли функция $F(x, y) = Ax + By + C$, образующая «пары рассеянных собеседников» со всеми функциями вида $f(x) = cx + d$.

(1) $f(x) = cx + d$, $F(x, y) = Ax + By + C$ образующая «пары рассеянных собеседников» со всеми функциями вида $f(x) = cx + d$ существует, например, $F(x, y) = x + y$ и $f(x) = x$.