

Олимпиада «Надежда энергетики» по математике

9 класс, 2020 год

1. Если на педсовете Марья Ивановна сидит ВКонтакте, то Иван Ильич и Александра Варфоломеевна тоже сидят ВКонтакте. Этот факт директор знает давно. Также ему известно следующее. Только один из двух — Александра Варфоломеевна или Петр Петрович — сидит ВКонтакте. Хотя бы один из двух других — Ивана Ильича и Марьи Ивановны — сидит ВКонтакте. Также известно, что Петр Петрович и Иван Ильич либо оба сидят, либо оба не сидят ВКонтакте. Пользуясь только этими четырьмя верными утверждениями, директор без труда определяет, кто на педсовете сидит ВКонтакте. Сможете ли Вы? Не забудьте обосновать однозначность ответа.

ВКонтакте сидят Петр Петрович и Иван Ильич

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2[x_1] + x_2 = 3/2, \\ 3[x_1] - 2x_2 = 4. \end{cases}$$

Здесь $[a]$ означает целую часть числа a .

$[x] = \lfloor x \rfloor$

3. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Через Q проведена прямая, перпендикулярная PQ , которая повторно пересекает окружности в точках A и B (причем точка Q лежит между A и B), а касательные к окружностям в этих точках пересекаются в точке C . Докажите, что отрезки AQ и CB видны из точки P под одинаковыми углами.

4. За два дня 100 банкиров собрали средства для борьбы с новым вирусом. Каждый из них внес однократно целое количество тысяч рублей, не превосходящее 200. При этом каждый взнос в первый день не превосходил 100 тысяч, а во второй был больше этой величины; и никакая пара из всех 100 взносов не отличалась ровно на 100 тысяч. Какую сумму собрали?

Если все взносы различны, то собрали 10050 тысяч; если нет, то $S_{\min} = 201$ тысяч, $S_{\max} = 19899$ тысяч

5. Необходимо построить дорогу, вымощенную бетонными плитами. Она пройдет в местности, где есть прямолинейный участок линии электропередач (ЛЭП) и завод по производству плит, находящийся на расстоянии d от ЛЭП ($d \neq 0$). Для ритмичной работы требуется, чтобы каждая точка строящейся дороги была одинаково удалена от завода и от ЛЭП.

А) Введите систему координат так, чтобы кирпичный завод имел координаты $(0, 0)$, а ЛЭП проходила через точку $(0, d)$ параллельно одной из координатных осей, и найдите координаты точки на дороге, удаленной от завода на расстояние $5d$.

Б) Для каких натуральных n на такой дороге существует точка, удаленная от завода на расстояние nd ?

А) две точки $(-3d, -4d)$ и $(3d, -4d)$; Б) для любых натуральных n