

## Олимпиада «Надежда энергетики» по математике

11 класс, 2020 год

1. Числовая характеристика  $x$  некоторого теплоэнергетического процесса является корнем уравнения

$$x^3 - 3x = t,$$

где  $t$  — температура окружающей среды, измеряемая в градусах Цельсия. По некоторым технологическим соображениям корень должен быть единственным. При каких значениях  $t$  уравнение имеет единственный корень  $x_0$ ? Оцените снизу абсолютную величину этого корня и покажите, что полученную оценку улучшить нельзя.

Уравнение имеет единственный корень  $x_0$  тогда и только тогда, когда  $|t| < 2$  или  $t = 2$  или  $t = -2$ . В этих случаях  $|x_0| < 2$ .

2. Для каждого целого значения параметра  $K$  решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2[x] + y = 3/2, \\ ([x] - x)^2 - 2[y] = K. \end{cases}$$

Здесь  $[x]$  означает целую часть числа  $x$ .

Если  $K = 4M - 2$ , где  $M \in \mathbb{Z}$ , то  $x = M, y = 3/2 - 2M$ ; при других  $K$  решений нет.

3. Две равные окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Произвольная прямая, проходящая через  $Q$ , повторно пересекает окружности в точках  $A$  и  $B$ , а касательные к окружностям в этих точках пересекаются в точке  $C$ . Докажите, что отрезки  $AQ$  и  $CB$  видны из точки  $P$  под одинаковыми углами.

4. При обработке числовых данных часто приходится вычислять среднее арифметическое

$$S(x, y) = (x + y)/2$$

и решать уравнения, содержащие среднее арифметическое. Найдите все конечные (состоящие из конечного числа элементов) числовые множества  $X$  такие, что для любых  $a$  и  $b$  из  $X$  множество  $X$  содержит корень  $x$  уравнения

$$S(a, x) = b.$$

В точности все одноэлементные множества  $X = \{a\}, a \in (-\infty; \infty)$ .

5. Юный хакер желает изменить оценки в электронном журнале. Но при изменении одних оценок изменяются и другие, а именно:

- а) если он увеличивает на 2 количество пятерок, то при этом количество двоек уменьшается на 1;
- б) если он увеличивает на 1 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 2;
- в) если он уменьшает на 2 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 1;
- г) если он уменьшает на 1 количество пятерок, то количество двоек уменьшается на 2.

Может ли он, совершая такие операции, превратить свои 3 пятерки и 30 двоек в 30 пятерок и 3 двойки?

Не может