

Олимпиада «Надежда энергетики» по математике

10 класс, 2020 год

1. Необходимо построить дорогу, вымощенную бетонными плитами. Она пройдет в местности, где есть прямолинейный участок линии электропередач (ЛЭП) и завод по производству плит, находящийся на расстоянии d от ЛЭП ($d \neq 0$). Для ритмичной работы требуется, чтобы каждая точка строящейся дороги была одинаково удалена от завода и от ЛЭП. Какой линией на плоскости описывается строящаяся дорога? Введите подходящую систему координат и найдите уравнение линии, описывающей дорогу, в этой системе координат; определите тип линии.

$$\boxed{\text{Линия строящейся дороги есть парабола; одно из возможных уравнений: } x \cdot \frac{px}{1} - \frac{c}{p} = h}$$

2. Найдите все значения вещественного параметра p , при которых разрешима система уравнений

$$\begin{cases} 2[x] + y = 3/2, \\ 3[x] - 2y = p. \end{cases}$$

Здесь $[a]$ означает целую часть числа a .

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni y, z - yL = d}$$

3. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Через Q проведена прямая, перпендикулярная PQ , которая повторно пересекает окружности в точках A и B , а касательные к окружностям в этих точках пересекаются в точке C . Докажите, что отрезки AQ и CB видны из точки P под одинаковыми углами.

4. При проектировании некоторого технического устройства возникла необходимость решать уравнения

$$a \circ x = b,$$

где операция \circ над двумя числами определена условием

$$y \circ z = \frac{y + z + |y - z|}{2}.$$

Найдите все числовые множества X такие, что для любых a, b из X указанное уравнение имеет единственный корень x и этот корень принадлежит множеству X .

$$\boxed{\text{В точности все одноэлементные множества } X = \{a\}, a \in (-\infty; \infty)}$$

5. Юный хакер желает изменить оценки в электронном журнале. Но при изменении одних оценок изменяются и другие, а именно:

- а) если он увеличивает на 2 количество пятерок, то при этом количество двоек уменьшается на 1;
- б) если он увеличивает на 1 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 2;
- в) если он уменьшает на 2 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 1;
- г) если он уменьшает на 1 количество пятерок, то количество двоек уменьшается на 2.

Может ли он, совершая такие операции, превратить свои 3 пятерки и 30 двоек в 30 пятерок и 3 двойки?

Не может