

Олимпиада «Надежда энергетики» по математике

11 класс, 2015 год, вариант 1

1. 100 сотрудников энергетической компании пользуются сетью Монолайн, а 200 сотрудников — сетью Громофон. За внутрисетевой звонок Монолайн берёт 43 копейки, а Громофон меньше, но целое число копеек. За звонок в другую сеть стоимость звонка возрастает в 3 раза. Все входящие звонки бесплатные. В течение дня каждый сотрудник звонит каждому по одному разу и от каждого один раз получает встречный звонок. Сколько стоят звонки с Громофона, если его ежедневные доходы с компании более чем на десять тысяч рублей превышают доходы Монолайна?

2. Наземный клапан подземного газохранилища огражден деревянным забором в виде окружности, разделенной 5 кирпичными столбами на 5 дуг. Требуется раскрасить деревянные части забора так, чтобы каждая дуга была бы одного цвета, а любые две соседние дуги имели разные цвета. Какое минимальное число цветов достаточно? Сколькими способами можно это сделать, используя минимальное число цветов?

3. Карта города разделена вертикальными и горизонтальными прямыми на n^2 областей, условно называемых «квадратами» и расположенных в n горизонтальных рядов и n колонок. В каждом «квадрате» располагают или не располагают одну трансформаторную подстанцию. Во всех рядах число подстанций различно. Может ли при этом число подстанций в каждой колонке не совпадать ни с одним числом подстанций в ряду? Если это возможно не всегда, то при каких условиях?

4. Известно, что $2^{x+y+z} + (0,5)^{x+y+z} = a$, $2^x + (0,5)^y = b$, $2^y + (0,5)^z = c$. Выразите через a , b и c величину $2^z + (0,5)^x$.

5. На доске написано 25 различных натуральных чисел. Оказалось, что среди них 9 чисел делятся на 13, 10 чисел делятся на 14, 11 чисел делятся на 15. Докажите, что среди них есть число, большее 345.

6. Целой частью $[x]$ произвольного числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \leq x$. Решите неравенство

$$[\cos^2(2 + 3^x)] \geq \frac{3^x}{2}.$$

7. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали AC и BD перпендикулярны. Сравните величины $BC + AD$ и $AB + CD$.