ДВИ по математике в МГУ

2013 год

1. Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $\frac{5}{2}$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.

$\boxed{\frac{3}{5}}$

2. Вычислите $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12$.

$\boxed{\frac{1}{2}}$

3. Решите неравенство

$$9\left(1 + 5^{1-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(5^{2x} + 5\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}}.$$

$\boxed{0 \leqslant x \leqslant 1}$

4. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 5x} - \frac{\cos x}{\cos 5x}.$$

$\boxed{x = \frac{k\pi}{8}, \frac{n\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \setminus 4\mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}}$

5. В 14:00 из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер «Быстрый». Когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер «Смелый». В этот же самый момент «Быстрый», не желая встречи со «Смелым», развернулся и пошел обратно к Верхнему. В 14:14, когда расстояние по реке от «Быстрого» до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от «Смелого» до «Быстрого», на «Смелом» осознали, что они идут с «Быстрым» на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в 14:18. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью.

$\boxed{2\ \text{км}}$

6. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r. Найдите r, если $R = 12$, а косинус угла между диагональю AC и основанием AD равен $\frac{3}{4}$.

$\boxed{7}$

7. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC, такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания (параллельном AB) отмечена точка D, так что $A'D : DB' = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

$\boxed{\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-1}}$

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sin\left(x + \frac{a}{x}\right) = x + 1$ имеет бесконечно много решений.

$\boxed{a \neq 0}$