

## Олимпиада «Бельчонок» по математике

## 11 класс, 2022 год, вариант 4

1. Какова вероятность, что в случайной последовательности из 8 единиц и двух нулей между двумя нулями ровно три единицы?
2. Каждый из 8 бельчат бросил шишку в какого-нибудь другого бельчонка, независимо от других. Докажите, что всегда найдётся группа из трёх бельчат, которые не бросили шишку в бельчонка из этой группы.
3. Разрешимо ли уравнение  $y^2 + y = x^3 - x$  во взаимно простых натуральных числах?
4. Точки  $P$  и  $Q$  — середины дуг  $KL$  и  $LM$ , описанной окружности треугольника  $KLM$ ,  $LS$  — биссектриса этого треугольника. Оказалось, что  $\angle KLM = 2\angle KML$  и  $\angle PSQ = 90^\circ$ . Найдите углы треугольника  $KLM$ .
5. Докажите, что для всех натуральных  $n$  выполняется неравенство

$$\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{6n}.$$