

Олимпиада «Бельчонок» по математике

8 класс, 2021 год, вариант 3

1. Известно, что $a = b + 7$, $c = d + 2$. Может ли быть так, что $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$?
2. Каждый из 100 школьников записался ровно в один летний отряд: или «Робинзоны», или «Мушкетёры», или «Алые паруса», или «Улыбка». Потом всем школьникам задали 4 вопроса. 1) Ты записался в отряд «Робинзоны»? Было 24 ответа «Да». 2) Ты записался в отряд «Мушкетёры»? Было 29 ответов «Да». 3) Ты записался в отряд «Алые паруса»? Было 27 ответов «Да». 4) Ты записался в отряд «Улыбка»? Было 30 ответов «Да». Среди школьников были шутники, которые на все четыре вопроса отвечали неверно («Да» вместо «Нет», «Нет» вместо «Да»). Сколько было шутников?
3. Из десяти букв $a, b, b, c, c, c, d, d, d, d$ выбирают 9 и записывают в ряд. Сколько различных последовательностей можно получить?
4. В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AB = 8$, $BC = 5$ провели биссектрисы внутренних углов A, B, C, D . В пересечении они образовали четырёхугольник $KLMN$. Затем провели биссектрисы внешних углов параллелограмма $ABCD$, они образовали четырёхугольник $PQRS$. Найдите длины диагоналей четырёхугольников $KLMN$ и $PQRS$.
5. Неотрицательные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4.$$

Докажите, что $0 \leq ab + bc + ac - abc \leq 2$.