

Олимпиада «Бельчонок» по математике

11 класс, 2021 год, вариант 2

1. В лесу живут бельчата-рыцари и бельчата-лжецы, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды несколько бельчат, среди которых был, по крайней мере, один рыцарь, собрались на поляне и сказали по фразе:

1-й бельчонок: «Среди нас ровно один рыцарь».

2-й бельчонок: «Среди нас ровно два лжеца».

3-й бельчонок: «Среди нас ровно три рыцаря».

...

$2k$ -й бельчонок: «Среди нас ровно $2k$ лжецов».

$(2k + 1)$ -й бельчонок: «Среди нас ровно $2k + 1$ рыцарей».

Определите количество собравшихся на поляне бельчат.

2. Найдите все решения уравнения

$$2 \cos \frac{x}{3} + \sqrt{5} = 2 - 2(\sqrt{5} - 1) \sin \frac{x}{6},$$

удовлетворяющие условию $\cos \frac{3x}{4} < 0$.

3. Серединный перпендикуляр к боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AB в точке L , а продолжение основания — в точке K . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что треугольники ALC и KBL равновелики.

4. Найдите количество пар натуральных чисел $(a; b)$, каждое из которых меньше миллиона, удовлетворяющих равенству

$$\text{НОК}(a, b + 1) = \text{НОК}(b, a + 3).$$

5. Найдите все возможные размеры таблицы $n \times m$ ($m \geq n \geq 3$), в клетки которой можно вписать какие-то числа (в каждую клетку по одному числу) так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма чисел в каждом квадрате 3×3 была положительной.