

## Олимпиада «Бельчонок» по математике

## 8 класс, 2020 год, вариант 2

1. Для различных положительных действительных чисел  $a, b$  справедливо равенство

$$\frac{a}{a^3 + a + 1} = \frac{b}{b^3 + b + 1}.$$

Найдите значение выражения

$$\frac{13 - a^2b - b^2a}{2 + a^2b + b^2a}.$$

2. В прошлом году первокурсник Сибирского федерального университета Миша прогуливался по лесу и заметил, что в субботу на одном из деревьев в лесу количество зелёных и красных листьев совпадало, а жёлтых листьев было в 7 раз больше, чем красных. В воскресенье на этом же дереве количество зелёных и жёлтых листьев совпадало, а красных листьев было в 7 раз больше, чем жёлтых. Докажите, что за ночь количество листьев на этом дереве уменьшилось хотя бы в 4 раза. (Зелёный лист может пожелтеть и покраснеть. Жёлтые и красные листья, повисев немного, опадают.)

3. В трапеции  $ABCD$  отмечены середины оснований  $AB$  и  $CD$  — точки  $K$  и  $L$ , соответственно. Известно, что  $AB = 2CD$ , а  $CK$  — биссектриса  $\angle BCD$ . Докажите, что  $AC = 2KL$ .

4. На шахматной доске  $8 \times 8$  расставляют  $n$  королей и  $n$  ладей так, что никакие две фигуры не бьют друг друга. При каком наибольшем  $n$  это возможно? (Ладья ходит на любое число полей по вертикали или горизонтали. Король ходит на одно поле по вертикали, горизонтали или диагонали.)

5. Одно из двух натуральных чисел больше другого числа на 10. Оказалось, что десятичная запись произведения этих чисел не содержит никаких других цифр, кроме 9. Найдите все такие числа.