

Олимпиада «Бельчонок» по математике

11 класс, 2020 год, вариант 3

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1, \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1. \end{cases}$$

2. Существует ли натуральное число N , имеющее 24 делителя, такое, что число $3N$ имеет 32 делителя?3. Окружность, проходящая через вершины B и C остроугольного треугольника ABC , пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно, а также проходит через центр описанной около треугольника APQ окружности. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке K , а $\angle BAC = 3\angle BKP$. Найдите $\angle BAC$.4. Квадрат 5×5 расчертили на 25 одинаковых клеток, и две из них покрасили в синий цвет, а остальные клетки остались белыми. Сколько существует таких раскрасок, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются за одну?5. Даны 30 действительных чисел a_i ($1 \leq i \leq 30$), удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{29} \leq a_{30}, \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{28} \leq 30, \\ a_{29} + a_{30} \leq 30. \end{cases}$$

Найдите максимальное возможное значение суммы квадратов этих чисел

$$A = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{29}^2 + a_{30}^2,$$

и укажите все последовательности чисел, для которых этот максимум достигается.