Олимпиада «Бельчонок» по математике

10 класс, 2020 год, вариант 1

1. На поляне в лесу за круглым столом собрались 450 бельчат. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый за столом сказал: «Из сидящего справа от меня и сидящего сразу за ним ровно один лжец». Сколько лжецов могло быть на поляне?

2. В командной олимпиаде по математике для получения призового места необходимо набрать n баллов. В составе команды «Бельчата» 3 участника: Вася, Коля и Петя. Оказалось, что сумма набранных баллов команды «Бельчата» меньше n. Если бы Вася получил вдвое больше баллов, то у команды было бы $2n-34$ баллов. С другой стороны, если бы Пете добавили бы вдвое больше баллов, чем у него было, то у команды было бы $2n+6$ баллов. Найдите n, если известно, что у Коли было на 9 баллов больше, чем у Васи.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и BE, пересекающиеся в точке H. Около треугольника ABH описана окружность, которая пересекает стороны AC и BC в точках F и G, отличных от концов. Докажите, что $FG=2DE$.

4. Катя записала на доске 2020 ненулевых действительных чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_{2020}, а Лена дописала к ним на доску произведение всех пар соседних чисел x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, $\ldots$, $x_{2019}x_{2020}$. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло оказаться на доске?

5. Пусть a, b, c — целые числа, такие что многочлен x^3+ax^2+bx+c имеет три различных попарно взаимно простых натуральных корня и многочлен ax^2+bx+c имеет натуральный корень. Докажите, что число $|a|$ — составное.