Олимпиада «Бельчонок» по математике

9 класс, 2018 год, вариант 2

1. Найдите количество пар натуральных чисел (m, n), $m < n < 2118$, таких, что число $\frac{\sqrt{mn}+\frac{m+n}{2}}{2}$ является квадратом целого числа.

2. В квадрате $ABCD$ на стороне AB выбрана точка M, на стороне BC выбрана точка N так, что угол $MDN = 45^\circ$, а длина MN равна 2. Отрезки DM и DN пересекают диагональ AC в точках E и F. Найдите длину EF.

3. Даны квадратные трёхчлены $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$. Известно, что

$$f(2) = g(3) = h(4), \quad f(3) = g(4) = h(2), \quad f(4) = g(2) = h(3).$$

Докажите, что многочлен $f(x) + g(x) + h(x)$ является константой.

4. Найдите все простые числа $p < q < r$ такие, что числа

$$A = (r - p)(r - q)(q - p) + 1 \quad \text{и} \quad B = 3p + 5q - 2$$

равны одному и тому же простому числу.

5. На полосе из 120 клеток, пронумерованных натуральными числами от 1 до 120, лежат орехи (по одному в каждой клетке). Бельчата Вася и Коля выбрали себе одинаковое количество орехов так, что если орех из клетки с номером n есть у Васи, то у Коли есть орех из клетки с номером $2n + 2$. Какое максимальное количество орехов могло быть у обоих бельчат?