

## Олимпиада «Бельчонок» по математике

## 9 класс, 2018 год, вариант 1

1. Найдите количество пар натуральных чисел  $(m, n)$ ,  $m < n < 2018$ , таких, что число  $\frac{\frac{m+n}{2} + \sqrt{mn}}{2}$  является квадратом целого числа.

2. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AD$ ,  $BK$  и  $CE$ , пересекающиеся в точке  $F$ . Угол  $ABF$  равен  $30^\circ$ ,  $FE = 3$ . Найдите  $FD$ .

3. Даны квадратные трёхчлены  $f(x)$ ,  $g(x)$  и  $h(x)$ . Известно, что

$$f(1) = g(2) = h(3), \quad f(2) = g(3) = h(1), \quad f(3) = g(1) = h(2).$$

Докажите, что многочлен  $f(x) + g(x) + h(x)$  является константой.

4. Найдите все простые числа  $p < q < r$  такие, что числа

$$A = (r - p)(r - q)(q - p) + 1 \quad \text{и} \quad B = 3p + 5q$$

равны одному и тому же простому числу.

5. На полосе из 100 клеток, пронумерованных натуральными числами от 1 до 100, лежат орехи (по одному в каждой клетке). Бельчата Вася и Коля выбрали себе одинаковое количество орехов так, что если орех из клетки с номером  $n$  есть у Васи, то у Коли есть орех из клетки с номером  $2n + 2$ . Какое максимальное количество орехов могло быть у обоих бельчат?