

Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»

Математика, 9 класс, 2023 год

1. При каких значениях параметра a уравнения $ax + a = 7$ и $3x - a = 17$ имеют общий целый корень?
2. Даны два взаимно простых натуральных числа p и q , отличающиеся больше, чем на единицу.
 - а) Докажите, что существует натуральное n , для которого числа $p + n$ и $q + n$ не будут взаимно простыми.
 - б) Найдите наименьшее такое n при $p = 2$, $q = 2023$.
3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, отличный от дельтоида (дельтоид — это четырехугольник, симметричный относительно одной из своих диагоналей). Известно, что биссектрисы углов A и C пересекаются в точке на диагонали BD . Докажите, что биссектрисы углов B и D пересекаются на диагонали AC .
4. Дано уравнение $x^3 + 2^n \cdot y = y^3 + 2^n \cdot x$. Докажите, что
 - а) если натуральные числа x , y и n удовлетворяют этому уравнению, то $x = y$;
 - б) если ненулевые целые x , y и неотрицательные целые n удовлетворяют этому уравнению, то $|x| = |y|$.
5. В финансовой компании 20 акционеров, их суммарный пакет — 2000 акций. Акционеров требуется разбить на две группы по 10 человек в каждой с пакетами по 1000 акций в группе. Докажите, что найдутся такие два акционера, что если один из них продаст другому часть своих акций, то нужное разбиение удастся провести.