

Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»**Математика, 10 класс, 2023 год**

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(x^2 + 3xy + 2y^2)(x^2y^2 - 1) = 0.$$

2. Сколько решений в натуральных числах x, y имеет уравнение $x + y + 2xy = 2023$?

3. Дан треугольник, у которого длины сторон — числа рациональные. Докажите, что рациональным числом является отношение R/r , где R и r — радиусы описанной и вписанной окружности треугольника.

4. В финансовой компании 20 акционеров, их суммарный пакет — 2000 акций. Акционеров требуется разбить на две группы по 10 человек в каждой с пакетами по 1000 акций в группе. Докажите, что найдутся такие два акционера, что если один из них продаст другому часть своих акций, то нужное разбиение удастся провести.

5. а) Докажите, что первые 11 натуральных чисел $1, 2, \dots, 11$ нельзя переставить так, чтобы соседние числа отличались либо на 3, либо на 5.

б) Можно ли сделать это для чисел $1, 2, \dots, 12$?