

Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»

Математика, 10 класс, 2022 год

1. При каких значениях числа a три графика $y = ax + a$, $y = x$ и $y = 2 - 2ax$ пересекаются в одной точке?

2. В треугольнике ABC медиана BM вдвое меньше биссектрисы AN . Известно, что угол CBM в три раза больше угла CAN . Найдите углы треугольника ABC .

3. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^3 + y} + \sqrt{y^3 + x} \geq \sqrt{x^3 + x} + \sqrt{y^3 + y}.$$

4. Докажите, что существует бесконечное множество троек натуральных чисел x, y, z , удовлетворяющих соотношению $x^2 + y^2 = z^{2022}$.

5. На координатной плоскости дан прямоугольник с целочисленными координатами вершин, отличный от квадрата. Докажите, что можно провести несколько прямых, параллельных сторонам прямоугольника, так, что прямоугольник разобьется на квадраты с целочисленными координатами вершин.