

## Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»

### Математика, 10 класс, 2022 год

1. При каких значениях числа  $a$  три графика  $y = ax + a$ ,  $y = x$  и  $y = 2 - 2ax$  пересекаются в одной точке?

2. В треугольнике  $ABC$  медиана  $BM$  вдвое меньше биссектрисы  $AN$ . Известно, что угол  $CBM$  в три раза больше угла  $CAN$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

3. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^3 + y} + \sqrt{y^3 + x} \geq \sqrt{x^3 + x} + \sqrt{y^3 + y}.$$

4. Докажите, что существует бесконечное множество троек натуральных чисел  $x, y, z$ , удовлетворяющих соотношению  $x^2 + y^2 = z^{2022}$ .

5. На координатной плоскости дан прямоугольник с целочисленными координатами вершин, отличный от квадрата. Докажите, что можно провести несколько прямых, параллельных сторонам прямоугольника, так, что прямоугольник разобьется на квадраты с целочисленными координатами вершин.