

Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»**Математика, 10 класс, 2020 год**

1. Даны две квадратичные функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = cx^2 + bx + a$. Оказалось, что функция $f(x) + g(x)$ имеет единственный корень. Докажите, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень.
2. Докажите, что в любом пифагоровом треугольнике есть сторона, длина которой делится на 5 (пифагоров треугольник — это прямоугольный треугольник с целыми сторонами).
3. 14 теннисистов сыграли в однокруговом турнире (каждый игрок сыграл с каждым одну партию). Докажите, что найдутся такие три игрока, что каждый из остальных 11 игроков проиграл хотя бы одному из этой тройки. (Ничьих в теннисе не бывает).
4. На стороне AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка O . Оказалось, что $AO = BO$, $CO = OD$ и $\angle BOA = \angle COD$. Пусть E — точка пересечения диагоналей четырёхугольника. Докажите, что EO — биссектриса угла AED .
5. Дан выпуклый 37-угольник, у которого все углы выражаются целым числом градусов. Докажите, что среди углов имеются хотя бы три одинаковых.