

## Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»

## Математика, 11 класс, 2018 год

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$\log_x y + \log_y x > 2.$$

2. Имеется  $n$  гирек весом  $1, 2, \dots, n$  (гр) и двухчашечные весы. Можно ли все гирьки разложить на весах так, чтобы на одной чаше было вдвое больше гирек, чем на другой, и весы уравновесились:

а) при  $n = 90$ ;

б) при  $n = 99$ ?

3. Дана прямая на плоскости и на ней отмечено несколько (больше двух) точек. Докажите, что можно отметить еще одну точку на плоскости (вне данной прямой) так, чтобы среди всех треугольников с отмеченными вершинами было больше половины остроугольных.

4. На координатной плоскости начерчена парабола  $y = x^2$ . На положительной полуоси  $Oy$  взяли точку  $A$  и через неё провели две прямые с положительными угловыми коэффициентами. Пусть  $M_1, N_1$  и  $M_2, N_2$  — точки пересечения с параболой первой и второй прямой соответственно. Найдите ординату точки  $A$ , если известно, что  $\angle M_1ON_1 = \angle M_2ON_2$ , где  $O$  — начало координат.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x = \sqrt{y}, \\ 2^{-y} = x^3. \end{cases}$$