

Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»

Математика, 10 класс, 2018 год

1. Даны три положительных числа, не обязательно различных. Известно, что если из произведения любых двух из них вычесть третье, то получится одно и то же число a . Докажите, что $a \geq -\frac{1}{4}$.

2. Решите уравнение

$$4x = 2 + \frac{x}{\sqrt{1+x+1}}.$$

3. Дана прямая на плоскости и на ней отмечено несколько (больше двух) точек. Докажите, что можно отметить еще одну точку на плоскости (вне данной прямой) так, чтобы среди всех треугольников с отмеченными вершинами было больше половины остроугольных.

4. Петя говорит Васе: «Я построил неравносторонний треугольник ABC и провел биссектрисы AM и CN . Оказалось, что $OM = ON$, где O — точка пересечения биссектрис. Сможешь ли ты определить, чему равен угол B ?» Вася отвечает: «Да такого не может быть, чтобы в неравностороннем треугольнике отрезки OM и ON оказались равными!». Кто из мальчиков прав?

5. Найдите все пары натуральных чисел m, n , для которых $n! + 4! = m^2$ (где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$).