

## Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»

## Математика, 11 класс, 2016 год

1. Решите неравенство

$$\frac{x - \sin 5}{\sin 6} < \frac{\sin 5}{x - \sin 6}.$$

2. Найдите все параметры  $b$ , для которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0, \\ ax + y = ab \end{cases}$$

имеет решение при любом  $a$ .

3. Дан треугольник  $ABC$ , вписанный в окружность  $\omega$ . Точка  $M$  — основание перпендикуляра из точки  $B$  на прямую  $AC$ , точка  $N$  — основание перпендикуляра из точки  $A$  на касательную к  $\omega$ , проведенную через точку  $B$ . Докажите, что  $MN \parallel BC$ .

4. а) Исследуйте функцию  $y = \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$  на четность (нечетность).

б) Найдите область определения и множество значений этой функции.

5. Последовательность  $a_n$  задается следующим образом:  $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = \frac{10}{9}$ . Докажите, что  $a_n$  принимает целые значения для бесконечного множества номеров  $n$ .