

## Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»

## Математика, 10 класс, 2015 год

1. Даны четыре действительных числа  $a, b, c, d$ , которые удовлетворяют двум соотношениям:  $a + b = c + d$  и  $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$ .

а) Докажите, что  $a^5 + b^5 = c^5 + d^5$ ;

б) Можно ли сделать вывод, что  $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$ ?

2. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $x^2 + 2x + 2 + 2|x + 1| = a$  имеет ровно два корня.

3. Дана трапеция  $ABCD$  и точка  $M$  на боковой стороне  $AB$ , такая, что  $DM \perp AB$ . Оказалось, что  $MC = CD$ . Найдите длину верхнего основания  $BC$ , если  $AD = d$ .

4. Дана квадратная таблица, в некоторых клетках которой стоят крестики. Назовем строку таблицы нечетной, если в ней нечетное количество крестиков. Аналогично, в нечетном столбце — нечетное количество крестиков.

а) Может ли оказаться так, что в таблице ровно 20 нечетных строк и 15 нечетных столбцов?

б) Можно ли в таблице  $16 \times 16$  расставить 126 крестиков так, чтобы все строки и столбцы оказались нечетными?

5. У Пети и Васи есть равные бумажные прямоугольные треугольники с катетами  $a$  и  $b$ . Мальчики хотят вырезать по квадрату наибольшей площади так, чтобы у Петиного квадрата одна вершина совпадала с вершиной прямого угла треугольника, а Васиин квадрат имел бы сторону, лежащую на гипотенузе.

а) Найдите размеры обоих квадратов;

б) Всегда ли (т. е. при любых ли катетах) Петин квадрат будет больше Васиного?