

Тренировочные задачи

Метод интервалов

1. Решите неравенство:

a) $x^2 - 5x + 4 < 0;$
 в) $4 - 3x - x^2 \geq 0;$

б) $2x^2 + 3x - 2 \geq 0;$
 г) $5x - 6x^2 - 1 < 0.$

$$\left((-\infty; -2] \cap \left(\frac{5}{2}; \infty \right) \right) \cup \left(\left(-4; 1 \right] \cap \left(\frac{1}{2}; \infty \right) \right)$$

2. Решите неравенство:

a) $x^2 - 9 < 0;$
 в) $36 - x^2 < 0;$

б) $4x^2 - 1 \geq 0;$
 г) $25 - 16x^2 \geq 0.$

$$\left[\left(-\infty; -\frac{5}{4} \right] \cup \left(\frac{5}{4}; \infty \right) \right] \cap \left((-\infty; 0) \cap (0; \infty) \right) = \left(-\infty; -\frac{5}{4} \right] \cup \left(\frac{5}{4}; \infty \right)$$

3. Решите неравенство:

a) $x^2 + 2x + 1 > 0;$
 в) $x^2 + 6x + 9 \leq 0;$

б) $4x^2 - 4x + 1 \geq 0;$
 г) $16x^2 - 40x + 25 < 0.$

$$\left((-\infty; -1) \cup (1; \infty) \right) \cap \left((-\infty; 0) \cap (0; \infty) \right) = \emptyset$$

4. Решите неравенство:

a) $x^2 + x + 2 > 0;$
 в) $x^2 + 4x + 7 \leq 0;$

б) $4x^2 - 2x + 3 \geq 0;$
 г) $2x - x^2 - 6 > 0.$

$$\left((-\infty; 0) \cap (0; \infty) \right) \cup \left((-\infty; -1) \cap (1; \infty) \right) = \emptyset$$

5. Решите неравенство:

a) $\frac{x-2}{x-5} > 0;$
 в) $\frac{3x+2}{11-7x} \geq 0;$

б) $\frac{1-2x}{x+3} > 0;$
 г) $\frac{4x-8}{x+7} \geq 0.$

$$\left((-\infty; -7) \cup \left(\frac{2}{7}; \infty \right) \right) \cap \left(\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty \right) \right) = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty \right)$$

6. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а)} & \frac{9-x^2}{x+2} \leq 0; \\ \text{в)} & \frac{2x+3}{2x^2-5x+2} \leq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} & \frac{x+4}{3x^2-x-2} < 0; \\ \text{г)} & \frac{x^2+x-2}{3-x} < 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{а) } [-3; -2) \cap [3; +\infty); \text{ б) } (-\infty; -4) \cup (-2; 1) \cap (3; +\infty) \text{ в) } (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 2) \text{ г) } (-\infty; -4) \cup (-2; 1) \cap (3; +\infty)}$$

7. Решите неравенство:

$$\text{а)} \frac{x^2-3x+2}{x^2-3x-4} \geq 0;$$

$$\text{б)} \frac{6-x-2x^2}{3x^2-11x-4} > 0.$$

$$\boxed{\text{а) } (-\infty; -1) \cup [1; 2] \cap (4; +\infty); \text{ б) } (-2; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}; 4)}$$

8. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а)} & \frac{x-2}{x^2+3} \leq 0; \\ \text{в)} & \frac{x^3-8}{x^2+5x-6} > 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} & \frac{x^2+2x+3}{x+4} \geq 0; \\ \text{г)} & \frac{x-5}{x^4-81} \leq 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{а) } (-\infty; 2; 6) \cap (-4; +\infty); \text{ б) } (-6; 1) \cap (2; +\infty); \text{ в) } [5; 3) \cap (3; -\infty) \cap (-\infty; -1) \cap (-2; 1) \cap (2; +\infty) \cap (-\infty; -6)}$$

9. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а)} & \frac{x^2-2x+1}{x-2} > 0; \\ \text{в)} & \frac{x^2-4x+4}{x+1} \leq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} & \frac{x-3}{x^2+4x+4} \leq 0; \\ \text{г)} & \frac{x^2}{x+2} < 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{а) } (2; +\infty); \text{ б) } (-\infty; -2) \cap (-2; 3; 4) \cap (-\infty; -1) \cap \{2\}; \text{ в) } (-\infty; -2)}$$

10. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а)} & (x^2-4)(x-1)^2 \geq 0; \\ \text{в)} & \frac{x^4-8x^3+16x^2}{x^2-6x+5} \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} & \frac{x^2-6x+9}{x^2+3x-4} \leq 0; \\ \text{г)} & \frac{x^4-2x^2+1}{x^2-4} \geq 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{а) } (-\infty; -2] \cup \{1\} \cup [2; +\infty); \text{ б) } (-4; 1) \cap \{3\}; \text{ в) } (-\infty; 1) \cup \{4\} \cup (5; +\infty); \text{ г) } (-\infty; -2) \cap \{-1, 1\} \cup (2; +\infty)}$$

11. Решите неравенство:

$$\text{а) } (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4 \leq 0;$$

$$\text{б) } \frac{x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4}{(x+1)^5(x+2)^6(x+3)^7} \geq 0.$$

$$\boxed{\text{а) } [1; 3] \cup \{4\}; \text{ б) } (-\infty; -3) \cap (-1; 0] \cap \{1\} \cup [2; +\infty)}$$

12. Решите неравенство:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \geqslant 0; \\ \text{б)} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} \leqslant 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{в)} \frac{x + 1}{x^2 - x - 2} < 0; \\ \text{г)} \frac{(x^2 + 2x + 1)(x - 3)}{x^2 + 3x + 2} \geqslant 0. \end{array}$$

$$(\infty; -\infty) \cap (-1; 0) \cap (-3; 1) \cap (1; 2) \cap (-2; -1) \cap [3; +\infty)$$

13. Решите неравенство:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} (x^2 - 4x)^2 \geqslant 16; \\ \text{б)} \frac{x - 3}{3x} \geqslant \frac{1}{2}; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{в)} \frac{1}{3 - 2x} \leqslant 1; \\ \text{г)} \frac{2 - 3x}{x + 2} \leqslant 5. \end{array}$$

$$(-\infty; -1] \cap (-\infty; 0) \cap (0; 9] \cap (\infty; \infty) \cap [1; \infty) \cap (9; \infty) \cap [2 \wedge 2 - 2; \infty)$$

14. Решите неравенство:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} x \leqslant \frac{2}{x + 1}; \\ \text{б)} x \leqslant 3 - \frac{1}{x - 1}; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{в)} 4x + 7 \leqslant \frac{2}{x}; \\ \text{г)} \frac{x + 7}{x - 2} > x - 1. \end{array}$$

$$(-\infty; -1] \cap (-1; 0) \cap (0; 1) \cap (1; \infty) \cap [2 \wedge 2 - 2; \infty)$$

15. Решите неравенство:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{2x - 3}{x} \geqslant \frac{3 - 2x}{2x^2 - 4x}; \\ \text{б)} \frac{7}{x^2 - 5x + 6} + \frac{9}{x - 3} + 1 \leqslant 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{в)} \frac{1}{x + 6} + \frac{1}{x - 2} \geqslant \frac{1}{x - 3}; \\ \text{г)} \frac{1}{x^2 + 8x - 9} \geqslant \frac{1}{3x^2 - 5x + 2}. \end{array}$$

$$(-\infty; -\frac{3}{2}] \cap (-\frac{3}{2}; 1) \cap (1; 3) \cap (3; 6) \cap (6; \infty) \cap (0; 9) \cap (9; \infty) \cap \{ \frac{7}{6} \} \cap (0; \infty)$$

16. Найдите область определения функции:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x - x^2 - 4}{x^2 + x - 2}}.$$

$$(-2; 1) \cap \{2\}$$

17. (МГУ, социологич. ф-т, 2004) Решите неравенство

$$\frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 7x + 14} \leqslant 0.$$

$$[-5; -3]$$

18. (*МГУ, ИСАА, 2005*) Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} \leq 1.$$

$$[-1; 5] \cap (-\infty; -1)$$

19. (*МГУ, химический ф-т, 2004*) Решите неравенство

$$\frac{10 + 3x - x^2}{x^2 - 3x + 2} \leq 1.$$

$$(-\infty; -2] \cup (1; 2) \cup [4; +\infty)$$

20. (*МГУ, ф-т глобальных процессов, 2005*) Решите неравенство

$$\frac{1}{2x^2 + 3x} \leq \frac{1}{3x - 2x^3}.$$

$$\left(\frac{\xi}{2} \wedge 0\right) \cap (0; -1] \cap \left(\frac{\xi}{2} \wedge -\frac{\xi}{2}\right)$$

21. (*МГУ, ИСАА, 2006*) Решите неравенство

$$\frac{5x + 1}{(x + 2)(x - 3)} \geq 1 + \frac{16}{x - 3}.$$

$$[-5 \cup (-2; 3)$$

22. (*МГУ, филологич. ф-т, 2007*) Решите неравенство

$$\frac{(x - 2)(x - 5)(x - 8)}{(x + 2)(x + 5)(x + 8)} \geq -1.$$

$$(-\infty; -2] \cup (0; -5) \cap (8; +\infty)$$

23. (*МГУ, физический ф-т, 2004*) Решите систему неравенств

$$-2 < \frac{2}{x^2 - x - 2} < -1.$$

$$\left(\frac{-2}{5\sqrt{-1}}; 1\right) \cap \left(0; \frac{2}{\sqrt{-1}}\right)$$

24. (*МГУ, ВМК, 2004*) Решите неравенство

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 7} \leq 5x - x^2 - 5.$$

$$[2; 3]$$