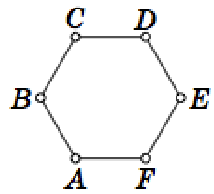
Взвешивания

1. (*Турнир городов, 1985, 7–8.2*) Имеется 68 монет, причём известно, что любые две монеты различаются по весу. За 100 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь найти самую тяжёлую и самую лёгкую монеты.

2. (*ММО, 2011, 8.1*) В вершинах шестиугольника $ABCDEF$ (см. рисунок) лежали 6 одинаковых на вид шариков: в A — массой 1 г, в B — 2 г, ..., в F — 6 г. Шутник поменял местами два шарика в противоположных вершинах. Имеются двухчашечные весы, позволяющие узнать, в какой из чаш масса шариков больше. Как за одно взвешивание определить, какие именно шарики переставлены?



3. (*Турнир городов, 2002, 8–9.3*) В Колиной коллекции есть четыре царские золотые пятирублевые монеты. Коле сказали, что какие-то две из них фальшивые. Коля хочет проверить (доказать или опровергнуть), что среди монет есть ровно две фальшивые. Удастся ли ему это сделать с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь? (Фальшивые монеты одинаковы по весу, настоящие тоже одинаковы по весу, но фальшивые легче настоящих.)

4. (*Всеросс., 2006, ОЭ, 8.8, 9.7*) При изготовлении партии из $N \geqslant 5$ монет работник по ошибке изготовил две монеты из другого материала (все монеты выглядят одинаково). Начальник знает, что таких монет ровно две, что они весят одинаково, но отличаются по весу от остальных. Работник знает, какие это монеты и что они легче остальных. Ему нужно, проведя два взвешивания на чашечных весах без гирь, убедить начальника в том, что фальшивые монеты легче настоящих, и в том, какие именно монеты фальшивые. Может ли он это сделать?

5. (*Турнир городов, 2013, 8–9.3*) Даны 11 гирь разного веса (одинаковых нет), каждая весит целое число граммов. Известно, что как ни разложить гири (все или часть) на две чаши, чтобы гирь на них было не поровну, всегда перевесит чаша, на которой гирь больше. Докажите, что хотя бы одна из гирь весит более 35 граммов.

6. (*Турнир городов, 2017, 8–9.5*) Вес каждой гирьки набора — нецелое число грамм. Ими можно уравновесить любой целый вес от 1 г до 40 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую). Каково наименьшее число гирь в таком наборе?

7. (*ММО, 1996, 8.2*) По кругу расставлены 10 железных гирек. Между каждыми соседними гирьками находится бронзовый шарик. Масса каждого шарика равна разности масс соседних с ним гирек. Докажите, что шарики можно разложить на две чаши весов так, чтобы весы уравновесились.

8. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2014.2*) Эксперту предъявили 12 одинаковых на вид монет, среди которых, возможно, есть фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые — тоже, фальшивая монета легче настоящей. У эксперта есть чашечные весы и эталонные монеты: 5 настоящих и 5 фальшивых. Сможет ли он за 4 взвешивания определить количество фальшивых монет среди предъявленных?

9. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2016.7*) В ряд выложено 100 монет. Внешне все монеты одинаковы, но где-то среди них лежат подряд 50 фальшивых (а остальные — настоящие). Все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые могут весить по-разному, но каждая фальшивая легче настоящей. Можно ли с помощью одного взвешивания на чашечных весах без гирь найти хотя бы 34 настоящие монеты?

10. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2014.4*) Среди 49 одинаковых на вид монет — 25 настоящих и 24 фальшивых. Для определения фальшивых монет имеется тестер. В него можно положить любое количество монет, и если среди этих монет больше половины — фальшивые, тестер подает сигнал. Как за пять тестов найти две фальшивых монеты?

11. (*«Курчатов», 2016, 11.3*) Имеется 288 внешне одинаковых монет весами 7 и 8 грамм (есть и те, и другие). На чаши весов положили по 144 монеты так, что весы в равновесии. За одну операцию можно взять с чаш любые две группы из одинакового числа монет и поменять их местами. Докажите, что можно не более чем за 11 операций сделать так, чтобы весы не были в равновесии.

12. (*Всеросс., 2016, РЭ, 9.4*) У царя Гиерона есть 11 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны 1, 2, . . . , 11 кг. Ещё у него есть мешок, который порвётся, если в него положить больше 11 кг. Архимед узнал веса всех слитков и хочет доказать Гиерону, что первый слиток имеет вес 1 кг. За один шаг он может загрузить несколько слитков в мешок и продемонстрировать Гиерону, что мешок не порвался (рвать мешок нельзя!). За какое наименьшее число загрузок мешка Архимед может добиться требуемого?

13. (*Всеросс., 2000, ОЭ, 10.2*) Среди пяти внешне одинаковых монет три настоящие и две фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. Как за наименьшее число взвешиваний найти хотя бы одну настоящую монету?

14. (*Всеросс., 2010, РЭ, 11.2*) В ряду из 2009 гирек вес каждой гирьки составляет целое число граммов и не превышает 1 кг. Веса любых двух соседних гирек отличаются ровно на 1 г, а общий вес всех гирь в граммах является чётным числом. Докажите, что гирьки можно разделить на две кучки, суммы весов в которых равны.

15. (*ММО, 2013, 11.1*) Два пирата делили добычу, состоящую из пяти золотых слитков, масса одного из которых 1 кг, а другого — 2 кг. Какую массу могли иметь три других слитка, если известно, что какие бы два слитка ни выбрал себе первый пират, второй пират сможет так разделить оставшиеся слитки, чтобы каждому из них досталось золота поровну?

16. (*ММО, 2016, 11.2*) Имеются чашечные весы, которые находятся в равновесии, если разность масс на их чашах не превосходит 1 г, а также гири массами $\ln 3$, $\ln 4$, . . . , $\ln 79$ г. Можно ли разложить все эти гири на чаши весов так, чтобы весы находились в равновесии?

17. (*Турнир городов, 2013, 10–11.4*) Имеются 100 камней разного веса (одинаковых нет), к каждому приклеена этикетка с указанием его веса. Хулиган Гриша хочет переклеить этикетки так, чтобы общий вес любого набора с числом камней от 1 до 99 отличался от суммы весов, указанных на этикетках из этого набора. Всегда ли он может это сделать?

18. (*Всеросс., 2019, ЗЭ, 9.7*) Среди 16 монет есть 8 *тяжёлых* — весом по 11 г, и 8 *лёгких* — весом по 10 г, но неизвестно, какие из монет какого веса. Одна из монет — юбилейная. Как за три взвешивания на двухчашечных весах без гирь узнать, является юбилейная монета тяжёлой или лёгкой?

19. (*Всеросс., 2003, ОЭ, 10.8, 11.8*) В наборе из 17 внешне одинаковых монет две фальшивых, отличающихся от остальных по весу. Известно, что суммарный вес двух фальшивых монет вдвое больше веса настоящей. Всегда ли можно ли определить пару фальшивых монет, совершив 5 взвешиваний на чашечных весах без гирь? (Определять, какая из фальшивых тяжелее, не требуется.)

20. (*Всеросс., 2013, ЗЭ, 11.7*) Глава Монетного двора хочет выпустить монеты 12 номиналов (каждый – в натуральное число рублей) так, чтобы любую сумму от 1 до 6543 рублей можно было заплатить без сдачи, используя не более 8 монет. Сможет ли он это сделать? (При уплате суммы можно использовать несколько монет одного номинала.)

21. (*Всеросс., 2015, ЗЭ, 10.8*) У нумизмата есть 100 одинаковых по внешнему виду монет. Он знает, что среди них 30 настоящих и 70 фальшивых монет. Кроме того, он знает, что массы всех настоящих монет одинаковы, а массы всех фальшивых — разные, причём любая фальшивая монета тяжелее настоящей; однако точные массы монет неизвестны. Имеются двухчашечные весы без гирь, на которых можно за одно взвешивание сравнить массы двух групп, состоящих из одинакового числа монет. За какое наименьшее количество взвешиваний на этих весах нумизмат сможет гарантированно найти хотя бы одну настоящую монету?

22. (*Всеросс., 2019, ЗЭ, 11.3*) Даны n монет попарно различных масс и n чашечных весов, $n > 2$. При каждом взвешивании разрешается выбрать какие-то одни весы, положить на их чаши по одной монете, посмотреть на показания весов и затем снять монеты обратно. Какие-то одни из весов (неизвестно, какие) испорчены и могут выдавать случайным образом как правильный, так и неправильный результат. За какое наименьшее количество взвешиваний можно заведомо найти самую тяжёлую монету?