Избранные задачи Всеросса по математике

Здесь представлены некоторые задачи по теории чисел, алгебре и комбинаторике, предлагавшиеся на заключительном этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике в разные годы.

Задача 1. (*Всеросс., 2013, финал, 9.3*) На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел a_1, a_2 …, a_{100}. Затем под каждым числом a_i написали число b_i, полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди b_1, b_2 …, b_{100}?

Задача 2. (*Всеросс., 2013, финал, 9.4*) На плоскости проведены n прямых, среди которых нет параллельных. Никакие три из них не пересекаются в одной точке. Докажите, что существует такая n-звенная несамопересекающаяся ломаная $A_0A_1A_2\ldots A_n$, что на каждой из n прямых лежит ровно по одному звену этой ломаной.

Задача 3. (*Всеросс., 2013, финал, 9.6*) Петя и Вася придумали десять квадратных трёхчленов. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из трёхчленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать?

Задача 4. (*Всеросс., 2012, финал, 9.2*) На окружности отмечены 2012 точек, делящих её на равные дуги. Из них выбрали k точек и построили выпуклый k-угольник с вершинами в выбранных точках. При каком наибольшем k могло оказаться, что у этого многоугольника нет параллельных сторон?

Задача 5. (*Всеросс., 2012, финал, 9.4*) Положительные действительные числа $a_1, \ldots, a_n$ и k таковы, что $a_1 + \ldots + a_n = 3k$, $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 3k^2$ и $a_1^3 + \ldots + a_n^3 > 3k^3 + k$. Докажите, что какие-то два из чисел $a_1, \ldots, a_n$ отличаются больше, чем на 1.

Задача 6. (*Всеросс., 2012, финал, 9.8*) В некотором городе сеть автобусных маршрутов устроена так, что каждые два маршрута имеют ровно одну общую остановку, и на каждом маршруте есть хотя бы 4 остановки. Докажите, что все остановки можно распределить между двумя компаниями так, что на каждом маршруте найдутся остановки обеих компаний.

Задача 7. (*Всеросс., 2011, финал, 9.3*) На доске нарисован выпуклый 2011-угольник. Петя последовательно проводит в нём диагонали так, чтобы каждая вновь проведённая диагональ пересекала по внутренним точкам не более одной из проведённых ранее диагоналей. Какое наибольшее количество диагоналей может провести Петя?

Задача 8. (*Всеросс., 2011, финал, 9.4*) Существуют ли три взаимно простых в совокупности натуральных числа, квадрат каждого из которых делится на сумму двух оставшихся?

Задача 9. (*Всеросс., 2011, финал, 9.8*) В некоторых клетках доски 100×100 стоит по фишке. Назовём клетку красивой, если в соседних с ней по стороне клетках стоит чётное число фишек. Может ли ровно одна клетка доски быть красивой?

Задача 10. (*Всеросс., 2009, финал, 9.6*) Можно ли раскрасить натуральные числа в 2009 цветов так, чтобы каждый цвет встречался бесконечное число раз, и не нашлось тройки чисел, покрашенных в три различных цвета, таких, что произведение двух из них равно третьему?

Задача 11. (*Всеросс., 2009, финал, 9.4*) По кругу стоят 100 напёрстков. Под одним из них спрятана монетка. За один ход разрешается перевернуть четыре напёрстка и проверить, лежит ли под одним из них монетка. После этого их возвращают в исходное положение, а монетка перемещается под один из соседних с ней напёрстков. За какое наименьшее число ходов наверняка удастся обнаружить монетку?

Задача 12. (*Всеросс., 2008, финал, 9.4*) В НИИЧАВО работают несколько научных сотрудников. В течение 8-часового рабочего дня сотрудники ходили в буфет, возможно по нескольку раз. Известно, что для каждых двух сотрудников суммарное время, в течение которого в буфете находился ровно один из них, оказалось не менее x часов ($x > 4$). Какое наибольшее количество научных сотрудников могло работать в этот день в НИИЧАВО (в зависимости от x)?