

Вписанные и описанные окружности

ЗАДАЧА 1. (МГУ, ДВИ, 2015.5) Окружность радиуса $\frac{3}{2}$ касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E , так что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться AC , если $\angle BAC = 30^\circ$?

□

ЗАДАЧА 2. (Турнир городов, 2012, 8–9) На наибольшей стороне AB треугольника ABC взяли такие точки P и Q , что $AQ = AC$, $BP = BC$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника PQC , совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC .

ЗАДАЧА 3. (Турнир городов, 2011, 8–9) Равнобедренная трапеция описана около окружности. Докажите, что биссектриса тупого угла этой трапеции делит её площадь пополам.

ЗАДАЧА 4. (Московская устная олимпиада по геометрии, 2014, 8–9) В треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$, BH — высота, точка K лежит на стороне AC , причём $BC = CK$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABK совпадает с центром вневписанной окружности треугольника BCH .

ЗАДАЧА 5. (Турнир городов, 2015, 8–9) Внутри прямоугольного треугольника построили две равные окружности так, что первая касается одного из катетов и гипотенузы, вторая касается другого катета и гипотенузы, а ещё эти окружности касаются друг друга. Пусть M и N — точки касания окружностей с гипотенузой. Докажите, что середина отрезка MN лежит на биссектрисе прямого угла треугольника.

ЗАДАЧА 6. (Турнир городов, 2013, 8–9) Дан треугольник ABC . Пусть I — центр вписанной в него окружности, и пусть X , Y , Z — центры окружностей, вписанных в треугольники AIB , BIC и AIC соответственно. Оказалось, что центр окружности, вписанной в треугольник XYZ , совпадает с I . Обязательно ли тогда треугольник ABC равносторонний?

□

ЗАДАЧА 7. (ММО, 2015, 9) Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC . Две равные окружности касаются сторон AB , BC и AC , BC соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке K . Оказалось, что K лежит на прямой OI . Найдите $\angle BAC$.

□06

ЗАДАЧА 8. («Высшая проба», 2020, 9–11.2) Дан описанный четырёхугольник $ABCD$, у которого радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и ADC равны. Найдите угол между диагоналями AC и BD .