Вписанная сфера

1. (*«Ломоносов», 2017.6*) В прямой круговой конус, радиус основания которого равен 2, вписан шар. Найдите объём этого шара, если он в три раза меньше объёма конуса.

$\boxed{\frac{16\pi}{9}\sqrt{9 \pm 5\sqrt{3}}}$

2. Вспомните, как *доказывается* планиметрическая формула $S = pr$. Установите её стереометрический аналог, перенеся идею доказательства в пространство.

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017.3*) В треугольной пирамиде длины перпендикуляров, опущенных из четырёх вершин на противоположные грани, равны 3, 4, 7 и 84/37 соответственно. Найдите радиус вписанного в эту пирамиду шара.

$\boxed{\frac{6}{7}}$

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017.5*) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна $\frac{2}{\sqrt{3}}$, а боковая сторона $AA_1 = 2$.

а) Докажите, что в призму можно вписать шар, и найдите его радиус.

б) Найдите объём наименьшей части шара, которую отсекает плоскость, проходящая через точки B, A_1 и E.

$\boxed{\text{б) } \frac{10\sqrt{5}-14}{15\sqrt{5}}\pi}$

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012.5*) Радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, равен R. Найдите величину двугранного угла при боковом ребре этой пирамиды, при которой максимален объём другой пирамиды, вершинами которой служат центр вписанной в исходную пирамиду сферы и точки касания этой сферы с боковыми гранями исходной пирамиды.

$\boxed{90^\circ}$

6. (*МФТИ, 2005.4*) Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна 6, двугранный угол между боковыми гранями пирамиды равен $\arccos\frac{7}{32}$. Точки A_1 и B_1 — середины рёбер AD и BD соответственно, BC_1 — высота в треугольнике DBC. Найти:

1. угол между прямыми AB и B_1C_1;
2. площадь треугольника $A_1B_1C_1$;
3. расстояние от точки B до плоскости $A_1B_1C_1$;
4. радиус вписанного в пирамиду $A_1B_1C_1D$ шара.

$\boxed{\text{1) } \arccos\frac{3}{5}\text{; 2) } 3\text{; 3) } \frac{21\sqrt{39}}{100}\text{; 4) } \frac{7\sqrt{39}}{104}}$

7. (*«Физтех», 2017.7*) Основание треугольной пирамиды $ABCD$ — правильный треугольник ABC. Объём пирамиды равен $\frac{25}{\sqrt{3}}$, а её высота, проведённая из вершины D, равна 3. Точка M — середина ребра CD. Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, равны между собой.

а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре AB.

б) Найдите все возможные значения длины ребра CD, если дополнительно известно, что грани BCD и ABC взаимно перпендикулярны.

а) $\arccos\left(\pm\frac{4}{5}\right)$; б) $\sqrt{\frac{31}{3}}$ или $3\sqrt{13}$

8. (*МФТИ, 2006.6*) В пирамиде $SABC$ каждый из углов ASB и ASC равен $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$, угол BSC прямой, ребро SB равно a. Центр сферы, вписанной в пирамиду $SABC$, лежит на высоте SD. Найти SA, SD и радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

$SA = \frac{a\sqrt{5}}{3}$, $SD = a\sqrt{\frac{3}{7}}$, $R = \frac{a\sqrt{3}}{7+\sqrt{7}}$

9. (*МГУ, ДВИ, 2013.7*) В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC, такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания (параллельном AB) отмечена точка D, так что $A'D : DB' = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

$\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$

10. (*МГУ, мехмат, 1999-05.6*) Основанием пирамиды $SABCD$ является трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такими, что $BC : AD = 2 : 5$. Диагонали трапеции пересекаются в точке E, а центр O вписанной в пирамиду сферы лежит на отрезке SE и делит его в отношении $SO : OE = 7 : 2$. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если площадь боковой грани SBC равна 8.

126

11. (*Всеросс., 2013, финал, 11.2*) Вписанная и вневписанная сферы треугольной пирамиды $ABCD$ касаются её грани BCD в различных точках X и Y. Докажите, что треугольник AXY тупоугольный.

12. (*Всеросс., 2003, ОЭ, 11*) Дан тетраэдр $ABCD$. Вписанная в него сфера σ касается грани ABC в точке T. Сфера σ' касается грани ABC в точке T' и продолжений граней ABD, BCD, CAD. Докажите, что прямые AT и AT' симметричны относительно биссектрисы угла BAC.

13. (*ММО, 1984, 10*) Треугольное сечение куба касается вписанного в куб шара. Докажите, что площадь этого сечения меньше половины площади грани куба.

14. (*Всеросс., 1994, финал, 11*) Высоты AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 тетраэдра $ABCD$ пересекаются в центре H сферы, вписанной в тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что тетраэдр $ABCD$ — правильный.

15. (*Всеросс., 1997, финал, 11*) Сфера, вписанная в тетраэдр, касается одной из его граней в точке пересечения биссектрис, другой — в точке пересечения высот, третьей — в точке пересечения медиан. Докажите, что тетраэдр правильный.

16. (*Всеросс., 1999, ОЭ, 11*) Многогранник описан около сферы. Назовем его грань *большой*, если проекция сферы на плоскость грани целиком попадает в грань. Докажите, что больших граней не больше 6.

17. (*Всеросс., 1998, финал, 11*) В тетраэдр $ABCD$, длины всех рёбер которого не более 100, можно поместить две непересекающиеся сферы диаметра 1. Докажите, что в него можно поместить одну сферу диаметра 1,01.

18. (*Турнир городов, 2004, 10–11*) У тетраэдра $ABCD$ сумма площадей двух граней (с общим ребром AB) равна сумме площадей оставшихся граней (с общим ребром CD). Докажите, что середины рёбер BC, AD, AC и BD лежат в одной плоскости, причём эта плоскость содержит центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$.

19. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2005, 10–11*) В пирамиду, основанием которой служит параллелограмм, можно вписать сферу. Докажите, что суммы площадей её противоположных боковых граней равны.

20. (*ММО, 1989, 10*) На рёбрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на рёбрах с общей вершиной, проведена плоскость. Докажите, что если три из четырёх проведённых плоскостей касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвёртая плоскость также его касается.

21. (*Всеросс. по геометрии, 2005, 11*) Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается его граней в точках A', B', C', D'. Отрезки AA' и BB' пересекаются, и точка их пересечения лежит на вписанной сфере. Доказать, что отрезки CC' и DD' тоже пересекаются на вписанной сфере.

22. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 10*) Дана описанная четырёхугольная пирамида $ABCDS$. Противоположные стороны основания пересекаются в точках P и Q, причём точки A и B лежат на отрезках PD и PC. Вписанная сфера касается боковых граней ABS и BCS в точках K и L. Докажите, что если прямые PK и QL пересекаются, то точка касания сферы и основания лежит на отрезке BD.

23. (*Всеросс. по геометрии, 2009, 10*) Дана четырёхугольная пирамида, в которую можно вписать сферу. Точку касания этой сферы с основанием пирамиды спроектировали на рёбра основания. Докажите, что все проекции лежат на одной окружности.

24. (*ММО, 2014, 11*) Поверхность выпуклого многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ состоит из восьми треугольных граней $A_iB_jC_k$, где i, j, k меняются от 1 до 2. Сфера с центром в точке O касается всех этих граней. Докажите, что точка O и середины трёх отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат в одной плоскости.

25. (*ММО, 1970, 10*) Около сферы радиуса 10 описан некоторый 19-гранник. Доказать, что на его поверхности найдутся две точки, расстояние между которыми больше 21.