

Вписанный четырёхугольник

Если три точки не лежат на одной прямой, то они обязательно лежат на одной окружности, поскольку вокруг любого треугольника можно описать окружность. А всегда ли четыре точки, находящиеся в общем положении, лежат на одной окружности? Иными словами, вокруг любого ли четырёхугольника можно описать окружность?

Довольно очевидно, что ответ на этот вопрос — отрицательный. Однако если вокруг четырёхугольника всё же можно описать окружность (такой четырёхугольник называется *вписанным*), то это приводит к интересным геометрическим ситуациям.

Если вершина угла расположена в центре окружности, то угол называется *центральный*. Любой дуге AB окружности отвечает центральный угол AOB . Градусной мерой дуги AB по определению считается градусная мера угла AOB .

Рассмотрим, кроме того, произвольную точку M на окружности, не лежащую на дуге AB . Угол AMB называется *вписанным*. Говорят, что он *опирается* на дугу AB .

ТЕОРЕМА. Вписанный угол AMB равен половине центрального угла AOB . Иными словами, вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

СЛЕДСТВИЕ. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.

Доказательству этих важнейших фактов посвящена первая задача. Далее продолжают использоваться уже введённые обозначения.

1. 1) Пусть M — точка окружности, диаметрально противоположная точке A . Докажите, что угол AMB равен половине угла AOB .

2) Пусть O лежит внутри вписанного угла AMB . Докажите теорему.

3) Пусть O лежит вне вписанного угла AMB . Докажите теорему.

4) Докажите следствие.

2. (*Свойство вписанного четырёхугольника*) Докажите, что сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180° .

3. Хорды AB и CD пересекаются в точке E . Дуги AC и BD равны α и β соответственно. Найдите угол AEC .

$$\frac{\alpha}{\beta + \alpha}$$

4. Хорды AB и CD не пересекаются; лучи AB и CD пересекаются в точке E . Дуги AC и BD равны α и β соответственно. Найдите угол AEC .

$$\frac{\alpha}{\beta - \alpha}$$

5. Точки M и N находятся в одной полуплоскости относительно прямой AB . Докажите, что если $\angle AMB = \angle ANB$, то точки A, M, N, B расположены на одной окружности.

6. (*Признак вписанного четырёхугольника*) Докажите, что если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180° , то он является вписанным.

7. Докажите, что трапеция является вписанной тогда и только тогда, когда она равнобедренная.

8. (Теорема об угле между касательной и хордой) В точке A , расположенной на окружности, проведена касательная ℓ . Докажите, что угол между ℓ и хордой AB равен вписанному углу, опирающемуся на дугу AB .

9. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC , пересекая сторону AB в точке E и сторону BC в точке F . Угол AEC в пять раз больше угла BAF , а угол ABC равен 72° . Найдите радиус окружности, если $AC = 6$.

□ε

10. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

11. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что

$$\angle BCD = 80^\circ, \quad \angle ACB = 50^\circ, \quad \angle ABD = 30^\circ.$$

Найдите угол ADB .

□50°

12. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что

$$\angle ACB = 25^\circ, \quad \angle ACD = 40^\circ, \quad \angle BAD = 115^\circ.$$

Найдите угол ADB .

□25°