Объём и площадь поверхности

1. (*ОММО, 2009.9*) Тетраэдр с ребром 1 повернули на 90° относительно прямой, соединяющей середины противоположных рёбер. Найдите объём общей части нового и исходного тетраэдров.

$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{24}}$

2. (*ОММО, 2013.10*) Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ повёрнут на 90° вокруг прямой, проходящей через середины противоположных рёбер AD и B_1C_1. Найдите объём общей части исходного куба и повёрнутого.

$\boxed{\sqrt{2} - \frac{3}{2}}$

3. (*ОММО, 2010.9*) Один фермер сварил сыр в виде неправильной пятиугольной призмы, а другой — в виде правильной четырехугольной пирамиды, высота которой в 2 раза меньше стороны основания. Ночью мыши отъели от всех вершин этих многогранников все частицы сыра, которые находились на расстоянии не большем 1 см от соответствующей вершины. У съеденных кусков сыра не было общих частиц. Какой из фермеров понес больший ущерб и во сколько раз?

Ущерб первого в 4,5 раза больше

4. (*ОММО, 2016.10*) Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а высота — $a/2$. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью этой пирамиды и сферами радиуса $a/3$ с центрами в вершинах основания этой пирамиды.

$\boxed{\frac{81-4\pi}{486}a^3}$

5. (*«Ломоносов», 2005.10*) При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством

$$|2x|^n + |y|^n + 7|z|^n < 1,$$

а тело Φ — объединение всех тел Φ_n. Найдите объём тела Φ.

$\boxed{4}$

6. (*ММО, 2010, 11*) В квадратной песочнице, засыпанной ровным слоем песка высотой 1, Маша и Паша делали куличи при помощи цилиндрического ведёрка высоты 2. У Маши все куличи удались, а у Паши — рассыпались и превратились в конусы той же высоты. В итоге весь песок ушёл на куличи, поставленные на дне песочницы отдельно друг от друга. Чьих куличей оказалось в песочнице больше: Машиных или Пашиных?

7. (*Турнир городов, 1999, 10–11*) В море плавает предмет, имеющий форму выпуклого многогранника. Может ли случиться, что 90% его объёма находится ниже уровня воды и при этом больше половины его поверхности находится выше уровня воды?

8. (*Всеросс., 2010, регион, 11*) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSBC$ и $OSDA$.

9. (*Всеросс., 2007, округ, 11*) Назовем многогранник *хорошим*, если его объём (измеренный в м^3) численно равен площади его поверхности (измеренной в м^2). Можно ли какой-нибудь хороший тетраэдр разместить внутри какого-нибудь хорошего параллелепипеда?

10. (*Всеросс., 1998, округ, 11*) Даны два правильных тетраэдра с рёбрами длины $\sqrt{2}$, переводящихся один в другой при центральной симметрии. Пусть φ — множество середин отрезков, концы которых принадлежат разным тетраэдрам. Найдите объём фигуры φ.

11. (*Всеросс. по геометрии, 2007, 10*) Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной 1. Из трёх углов при вершине пирамиды два — прямые. Найдите наибольший объём пирамиды.

$\boxed{\frac{1}{16}}$