Векторы

1. (*Турнир городов, 1983, 9–10.4*) а) Из произвольной точки M внутри правильного n-угольника проведены перпендикуляры MK_1, MK_2, …, MK_n к его сторонам (или их продолжениям). Докажите, что

$$\overrightarrow{MK_1} + \overrightarrow{MK_2} + \ldots + \overrightarrow{MK_n} = \frac{n}{2} \cdot \overrightarrow{MO}$$

(O — центр n-угольника).

б) Докажите, что сумма векторов, проведённых из любой точки M внутри правильного тетраэдра перпендикулярно к его граням, равна $\frac{4}{3}\overrightarrow{MO}$, где O — центр тетраэдра.

2. (*ММО, 2010, 11.4*) Функция f каждому вектору $\vec{v}$ (с общим началом в точке O) пространства ставит в соответствие число $f(\vec{v})$, причём для любых векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$ и любых чисел α, β значение $f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})$ не превосходит хотя бы одного из чисел $f(\vec{u})$ или $f(\vec{v})$. Какое наибольшее количество значений может принимать такая функция?

3. (*ММО, 2018, 11.5*) Женя красила шарообразное яйцо последовательно в пяти красках, погружая его в стакан с очередной краской так, чтобы окрашивалась ровно половина площади поверхности яйца (полсферы). В результате яйцо окрасилось полностью. Докажите, что одна из красок была лишней, то есть если бы Женя не использовала эту краску, а в другие краски погружала бы яйцо так же, то оно всё равно окрасилось бы полностью.