Уравнения и неравенства на ММО и Всероссе

Данный листок посвящён задачам, которые внешне кажутся не столько олимпиадными, сколько экзаменационными. Однако они регулярно появляются на региональном и заключительном этапах Всероссийской олимпиады школьников по математике и на Московской математической олимпиаде.

Разумеется, название «уравнения и неравенства» несколько условно и не охватывает целиком всё содержание листка. Сюда же относятся задачи, связанные с тождественными преобразованиями и оценками тригонометрических и логарифмических выражений, исследованием функций и их графиков и т. п.

Московская математическая олимпиада

После введения в 2011 году формата «первый день — второй день» (для 11 класса) такие задачи стали появляться на ММО каждый год.

1. (*ММО, 2019, 11.1*) Пользуясь равенством $\lg 11 = 1{,}0413\ldots$, найдите наименьшее число $n > 1$, для которого среди n-значных чисел нет ни одного, равного некоторой натуральной степени числа 11.

2. (*ММО, 2019, 11.2*) Существует ли такая гипербола, задаваемая уравнением вида $y = \frac{a}{x}$, что в первой координатной четверти ($x > 0$, $y > 0$) под ней лежат ровно 82 точки с целочисленными координатами?

3. (*ММО, 2019, 11.4*) Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ и для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0$, уравнение

$$a_1(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)+a_2(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)+\ldots+a_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}) = 0$$

имеет хотя бы один действительный корень.

4. (*ММО, 2018, 11.1*) Решите уравнение

$$x^3 + (\log_2 5 + \log_3 2 + \log_5 3)\, x = (\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2)\, x^2 + 1.$$

5. (*ММО, 2018, 11.3*) Пусть x и y — пятизначные числа, в десятичной записи которых использованы все десять цифр ровно по одному разу. Найдите наибольшее возможное значение x, если

$$\operatorname{tg} x^\circ - \operatorname{tg} y^\circ = 1 + \operatorname{tg} x^\circ \operatorname{tg} y^\circ$$

(x° обозначает угол в x градусов).

98721

6. (*ММО, 2017, 11.2*) Незнайка знаком только с десятичными логарифмами и считает, что логарифм суммы двух чисел равен произведению их логарифмов, а логарифм разности двух чисел равен частному их логарифмов. Может ли Незнайка подобрать хотя бы одну пару чисел, для которой действительно верны одновременно оба этих равенства?

7. (*ММО, 2017, 11.3*) Пусть x_0 — положительный корень уравнения $x^{2017} - x - 1 = 0$, а y_0 — положительный корень уравнения $y^{4034} - y = 3x_0$.

а) Сравните x_0 и y_0.

б) Найдите десятый знак после запятой числа $|x_0 - y_0|$.

8. (*ММО, 2016, 11.2*) Существует ли такое значение x, что выполняется равенство

$$\arcsin^2 x + \arccos^2 x = 1\,?$$

9. (*ММО, 2015, 11.1*) Сумма нескольких не обязательно различных положительных чисел не превосходила 100. Каждое из них заменили на новое следующим образом: сначала прологарифмировали по основанию 10, затем округлили стандартным образом до ближайшего целого числа и, наконец, возвели 10 в найденную целую степень. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел превышает 300?

10. (*ММО, 2015, 11.2*) Какое наибольшее количество множителей вида $\sin \frac{n\pi}{x}$ можно вычеркнуть в левой части уравнения

$$\sin \frac{\pi}{x} \sin \frac{2\pi}{x} \sin \frac{3\pi}{x} \ldots \sin \frac{2015\pi}{x} = 0$$

так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

11. (*ММО, 2014, 11.2*) Найдите все значения a, для которых найдутся такие x, y и z, что числа $\cos x$, $\cos y$ и $\cos z$ попарно различны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию, при этом числа $\cos(x + a)$, $\cos(y + a)$ и $\cos(z + a)$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию.

12. (*ММО, 2014, 11.2*) Найдите все такие a и b, что

$$|a| + |b| \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$$

и при всех x выполнено неравенство

$$|a \sin x + b \sin 2x| \leqslant 1.$$

13. (*ММО, 2013, 11.2*) Найдите такое значение $a > 1$, при котором уравнение $a^x = \log_a x$ имеет единственное решение.

14. (*ММО, 2013, 11.3*) Сравните числа

$$\left(1 + \frac{2}{3^3}\right)\left(1 + \frac{2}{5^3}\right)\ldots\left(1 + \frac{2}{2013^3}\right) \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

15. (*ММО, 2012, 11.2*) Для заданных значений a, b, c и d оказалось, что графики функций

$$y = 2a + \frac{1}{x-b} \quad \text{и} \quad y = 2c + \frac{1}{x-d}$$

имеют ровно одну общую точку. Докажите, что графики функций

$$y = 2b + \frac{1}{x-a} \quad \text{и} \quad y = 2d + \frac{1}{x-c}$$

также имеют ровно одну общую точку.

16. (*ММО, 2011, 11.2*) Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов

$$x^{2011} + 2011x - 1 \quad \text{и} \quad x^{2011} - 2011x + 1.$$

17. (*ММО, 2010, 10.3*) Можно ли, применяя к числу 2 функции sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg в любом количестве и в любом порядке, получить число 2010?

18. (*ММО, 2010, 11.1*) Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$\frac{1}{a + \frac{2010}{b + \frac{1}{c}}},$$

где a, b, c — попарно различные ненулевые цифры?

19. (*ММО, 2007, 11*) Значение a подобрано так, что число корней первого из уравнений

$$4^x - 4^{-x} = 2\cos ax, \quad 4^x + 4^{-x} = 2\cos ax + 4$$

равно 2007. Сколько корней при том же a имеет второе уравнение?

20. (*ММО, 2006, 10*) Может ли сумма тангенсов углов одного треугольника равняться сумме тангенсов углов другого, если один из этих треугольников остроугольный, а другой тупоугольный?

21. (*ММО, 2006, 11*) Какие значения может принимать разность возрастающей арифметической прогрессии a_1, a_2, ..., a_5, все члены которой принадлежат отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$, если числа $\cos a_1$, $\cos a_2$, $\cos a_3$, а также числа $\sin a_3$, $\sin a_4$ и $\sin a_5$ в некотором порядке тоже образуют арифметические прогрессии?

22. (*ММО, 2005, 10*) Существует ли плоский четырёхугольник, у которого тангенсы всех внутренних углов равны?

23. (*ММО, 2005, 11*) Числа a и b таковы, что первое уравнение системы

$$\begin{cases} \sin x + a = bx, \\ \cos x = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение.

24. (*ММО, 2004, 11*) Для заданных натуральных чисел $k_0 < k_1 < k_2$ выясните, какое наименьшее число корней на промежутке $[0; 2\pi)$ может иметь уравнение вида

$$\sin(k_0 x) + A_1 \sin(k_1 x) + A_2 \sin(k_2 x) = 0$$

где A_1, A_2 — вещественные числа.

25. (*ММО, 2003, 10*) Дана бесконечная последовательность многочленов $P_1(x), P_2(x), \ldots$ Всегда ли существует конечный набор функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_N(x)$, композициями которых можно записать любой из них (например, $P_1(x) = f_2(f_1(f_2(x))))$?

26. (*ММО, 2000, 11.2*) Вычислите

$$\int\limits_0^{\pi} (|\sin(1999x)| - |\sin(2000x)|)\, dx.$$

27. (*ММО, 1997, 11*) Вычислите

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)\right) dx.$$

28. (*ММО, 1995, 10*) Известно число $\sin\alpha$. Какое наибольшее число значений может принимать а) $\sin\frac{\alpha}{2}$; б) $\sin\frac{\alpha}{3}$?

29. (*ММО, 1993, 11*) Известно, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = p$, $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = q$. Найти $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

$\frac{pq}{q-p}$ при $p, q \neq 0$ и $p \neq q$. Нужно разобрать также остальные случаи

30. (*ММО, 1992, 10*) Докажите, что если сумма косинусов углов четырёхугольника равна нулю, то он — параллелограмм, трапеция или вписанный четырёхугольник.

31. (*ММО, 1990, 11*) Найдите наибольшее значение выражения

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

32. (*ММО, 1988, 10*) Существует ли на координатной плоскости прямая, относительно которой симметричен график функции $y = 2^x$?

33. (*ММО, 1987, 10*) а) Доказать, что из трёх положительных чисел всегда можно выбрать такие два числа x и y, что

$$0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant 1.$$

б) Верно ли, что указанные два числа можно выбрать из любых четырёх чисел?

34. (*ММО, 1986, 10*) Решите уравнение $x^{x^4} = 4$ $(x > 0)$.

35. (*ММО, 1984, 10*) Не используя калькуляторов, таблиц и т. п., докажите неравенство

$$\sin 1 < \log_3 \sqrt{7}\,.$$

36. (*ММО, 1983, 10*) На доске после занятия осталась запись: «*Вычислить*

$$t(0) - t\left(\frac{\pi}{5}\right) + t\left(\frac{2\pi}{5}\right) - t\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \ldots + t\left(\frac{8\pi}{5}\right) - t\left(\frac{9\pi}{5}\right),$$

где $t(x) = \cos 5x + *\cos 4x + *\cos 3x + *\cos 2x + *\cos x + *$». Увидев её, студент мехмата сказал товарищу, что он может вычислить эту сумму, даже не зная значений стёртых с доски коэффициентов (вместо них в нашей записи $*$). Не ошибается ли он?

37. (*ММО, 1981, 10*) Доказать, что последовательность $x_n = \sin(n^2)$ не стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности.

38. (*ММО, 1963, 10*) Положительные числа x, y, z обладают тем свойством, что

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z < \pi.$$

Доказать, что сумма этих чисел больше их произведения.

39. (*ММО, 1954, 10*) Найти все действительные решения уравнения

$$x^2 + 2x\sin(xy) + 1 = 0.$$

40. (*ММО, 1952, 10*) Найдите соотношение между $\arcsin\cos\arcsin x$ и $\arccos\sin\arccos x$.

41. (*ММО, 1948, 9–10*) Доказать без помощи таблиц, что

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2.$$

42. (*ММО, 1939*) Доказать, что

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}\,.$$

Всероссийская олимпиада школьников по математике

43. (*Всеросс., 2018, финал, 10.1*) Найдите количество корней уравнения

$$|x| + |x+1| + \ldots + |x+2018| = x^2 + 2018x - 2019.$$

44. (*Всеросс., 2012, РЭ, 10.5*) Дан выпуклый пятиугольник. Петя выписал в тетрадь значения синусов всех его углов, а Вася — значения косинусов всех его углов. Оказалось, что среди выписанных Петей чисел нет четырёх различных. Могут ли все числа, выписанные Васей, оказаться различными?

45. (*Всеросс., 2004, ОЭ, 10.1*) Сумма положительных чисел a, b, c равна $\frac{\pi}{2}$. Докажите, что

$$\cos a + \cos b + \cos c > \sin a + \sin b + \sin c.$$

46. (*Всеросс., 2003, ОЭ, 10.1*) Найдите все углы α, для которых набор чисел $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$ совпадает с набором $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$.

$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}}$

47. (*Всеросс., 1998, ОЭ, 10.1*) Пусть

$$f(x) = x^2 + ax + b\cos x.$$

Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнения $f(x) = 0$ и $f(f(x)) = 0$ имеют совпадающие непустые множества действительных корней.

48. (*Всеросс., 1995, финал, 10.1*) Решите уравнение $\cos(\cos(\cos(\cos x))) = \sin(\sin(\sin(\sin x)))$.

49. (*Всеросс., 2009, финал, 10.3*) Сколько раз функция

$$f(x) = \cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2009}$$

меняет знак на отрезке $\left[0, \dfrac{2009\pi}{2}\right]$?

50. (*Всеросс., 2011, РЭ, 11.1*) Существует ли такое вещественное α, что число $\cos\alpha$ иррационально, а все числа $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\cos 5\alpha$ рациональны?

51. (*Всеросс., 2010, РЭ, 11.5*) Углы треугольника α, β, γ удовлетворяют неравенствам $\sin\alpha > \cos\beta$, $\sin\beta > \cos\gamma$, $\sin\gamma > \cos\alpha$. Докажите, что треугольник остроугольный.

52. (*Всеросс., 2009, РЭ, 11.3*) Докажите, что $x\cos x \leqslant \dfrac{\pi^2}{16}$ при $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

53. (*Всеросс., 2012, РЭ, 11.7*) Даны различные натуральные числа a, b. На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c, отличное от a, b и такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки.

54. (*Всеросс., 2005, ОЭ, 11.1*) Найдите все пары чисел $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие равенству $\sin x + \sin y = \sin(xy)$.

55. (*Всеросс., 1994, ОЭ, 11.1*) Докажите, что при всех x, $0 < x < \frac{\pi}{3}$, справедливо неравенство

$$\sin 2x + \cos x > 1.$$

56. (*Всеросс., 2006, ОЭ, 11.5*) Докажите, что для каждого x такого, что $\sin x \neq 0$, найдётся такое натуральное n, что $|\sin nx| \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

57. (*Всеросс., 2001, ОЭ, 11.5*) Дана последовательность $\{x_k\}$ такая, что

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = n \sin x_n + 1.$$

Докажите, что последовательность непериодична.

58. (*Всеросс., 1995, ОЭ, 11.5*) Для углов α, β, γ справедливо неравенство

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqslant 2.$$

Докажите, что

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \sqrt{5}\,.$$

59. (*Всеросс., 1997, ОЭ, 11.6*) Докажите, что если $1 < a < b < c$, то

$$\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0.$$

60. (*Всеросс., 2004, ОЭ, 11.7*) При каких натуральных n для любых чисел α, β, γ, являющихся величинами углов остроугольного треугольника, справедливо неравенство

$$\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma < 0\,?$$

61. (*Всеросс., 2017, финал, 11.1*) Число x таково, что обе суммы $S = \sin 64x + \sin 65x$ и $C = \cos 64x + \cos 65x$ — рациональные числа. Докажите, что в одной из этих сумм оба слагаемых рациональны.

62. (*Всеросс., 2014, финал, 11.1*) Существует ли такое положительное число a, что при всех действительных x верно неравенство

$$|\cos x| + |\cos ax| > \sin x + \sin ax\,?$$

63. (*Всеросс., 2007, финал, 11.1*) Докажите, что при $k > 10$ в произведении

$$f(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x \ldots \cos 2^k x$$

можно заменить один cos на sin так, что получится функция $f_1(x)$, удовлетворяющая при всех действительных x неравенству $|f_1(x)| \leqslant \dfrac{3}{2^{k+1}}$.

64. (*Всеросс., 2006, финал, 11.1*) Докажите, что $\sin\sqrt{x} < \sqrt{\sin x}$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

65. (*Всеросс., 2005, финал, 11.1*) Какое наибольшее конечное число корней может иметь уравнение

$$|x-a_1|+\ldots+|x-a_{50}|=|x-b_1|+\ldots+|x-b_{50}|,$$

где $a_1, \ldots, a_{50}, b_1, \ldots, b_{50}$ — различные числа?

66. (*Всеросс., 2003, финал, 11.1*) Пусть α, β, γ, τ — такие положительные числа, что при всех x

$$\sin\alpha x+\sin\beta x=\sin\gamma x+\sin\tau x.$$

Докажите, что $\alpha=\gamma$ или $\alpha=\tau$.

67. (*Всеросс., 2009, финал, 11.5*) Пусть $1<a\leqslant b\leqslant c$. Докажите, что

$$\log_a b+\log_b c+\log_c a\leqslant\log_b a+\log_c b+\log_a c.$$

68. (*Всеросс., 2000, финал, 11.5*) Докажите неравенство

$$\sin^n 2x+(\sin^n x-\cos^n x)^2\leqslant 1,$$

где n — любое натуральное число.

69. (*Всеросс., 2019, финал, 11.2*) Верно ли, что при любых ненулевых целых числах a и b система

$$\begin{cases}\operatorname{tg}(13x)\operatorname{tg}(ay)=1,\\ \operatorname{tg}(21x)\operatorname{tg}(by)=1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

70. (*Всеросс., 2002, финал, 11.3*) Докажите, что для всех $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ при $n>m$, где n, m — натуральные, справедливо неравенство

$$2\left|\sin^n x-\cos^n x\right|\leqslant 3\left|\sin^m x-\cos^m x\right|.$$