Теорема о трёх перпендикулярах

В конце предыдущей статьи мы описали схему рассуждений, которая применяется для доказательства перпендикулярности прямых. На этой схеме, в частности, основана *теорема о трёх перпендикулярах*.

Прежде чем формулировать саму теорему, необходимо ввести некоторую стандартную терминологию.

Перпендикуляр и наклонная

Рассмотрим плоскость π и точку M, не принадлежащую этой плоскости. Из точки M проведём прямую, перпендикулярную плоскости π и пересекающую её в точке N (рис. 1).

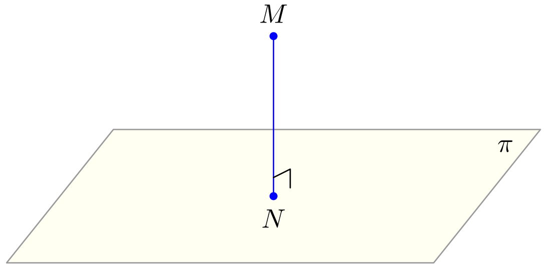

Рис. 1. Перпендикуляр

Отрезок MN называется *перпендикуляром*, проведённым из точки M к плоскости π. Точка N называется *основанием* этого перпендикуляра.

С понятием перпендикуляра мы уже встречались ранее. Например, высота пирамиды — это перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания.

Если прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна этой плоскости, то такая прямая называется *наклонной*. На рис. 2 мы видим наклонную l, пересекающую плоскость π в точке A.

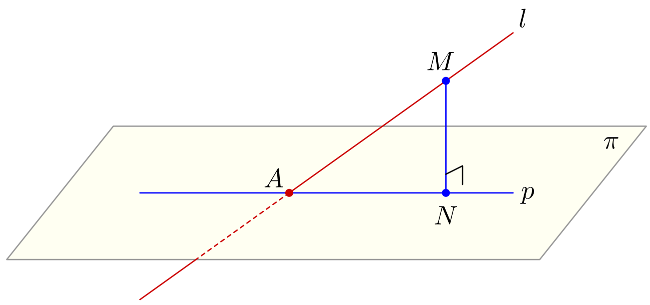

Рис. 2. Наклонная и проекция наклонной

Возьмём произвольную точку M прямой l, не лежащую в плоскости π, и проведём перпендикуляр MN к этой плоскости. Соединив точку A с основанием N проведённого перпендикуляра, получим прямую p, лежащую в плоскости π. Прямая p называется *проекцией наклонной* l на плоскость π.

Не будет ли прямая p менять своё положение, если M перемещается по прямой l? К счастью, нет. Можно показать, что основания N *всех* перпендикуляров MN будут лежать на *одной и той же* прямой p. Таким образом, понятие проекции наклонной определено корректно: оно не зависит от конкретного выбора точки M.

Формулировка и доказательство теоремы

Теорема о трёх перпендикулярах. Прямая на плоскости перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции наклонной.

Мы видим данную ситуацию на рис. 3. Прямая m лежит в плоскости π, прямая l — это наклонная, p — проекция наклонной.

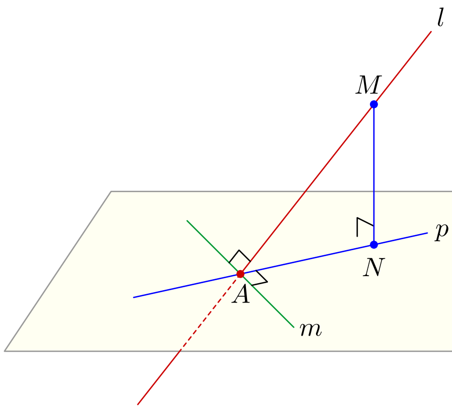

Рис. 3. $m \perp l \Leftrightarrow m \perp p$

Обратите внимание на выражение «тогда и только тогда» в формулировке теоремы[1]. Оно означает, что справедливы *два* утверждения.

1. *Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна проекции наклонной.* Символически: $m \perp l \Rightarrow m \perp p$.

2. *Если прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна наклонной.* Символически: $m \perp p \Rightarrow m \perp l$.

Данные утверждения являются обратными друг к другу: они отличаются только направлением стрелки логического следования. Можно объединить эти утверждения, используя двустороннюю стрелку: $m \perp l \Leftrightarrow m \perp p$.

Доказательство теоремы. Нам нужно доказать два утверждения, сформулированные выше под пунктами 1 и 2. Снова обращаемся к рис. 3.

1. Предположим сначала, что прямая на плоскости перпендикулярна наклонной: $m \perp l$. Поскольку MN — перпендикуляр к плоскости π, прямая MN перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости — в частности, прямой m.

   Таким образом, прямая m перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости AMN (а именно, прямым l и MN). Согласно признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая m перпендикулярна плоскости AMN. Тогда m перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости AMN — в частности, прямой p. Первое утверждение тем самым доказано.

2. Наоборот, пусть прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной: $m \perp p$. Как мы уже видели выше, $m \perp MN$. Снова прямая m оказывается перпендикулярной двум пересекающимся прямым плоскости AMN (на сей раз это p и MN), так что $m \perp AMN$. Тогда m перпендикулярна любой прямой плоскости AMN — в частности, прямой l. Тем самым доказано второе утверждение и вся теорема.

[1] Синонимы этого выражения: *если и только если*, *в том и только в том случае*, *необходимо и достаточно*, *равносильно*, *эквивалентно*.

Как видите, вышеупомянутая схема доказательства перпендикулярности прямых (а именно, чтобы доказать перпендикулярность двух прямых, мы доказываем, что одна прямая перпендикулярна плоскости, в которой лежит вторая прямая) «упакована» внутри доказательства данной теоремы. Поэтому зачастую достаточно сослаться на теорему о трёх перпендикулярах, не воспроизводя каждый раз саму схему. (Тем не менее, схему вы должны чётко знать — бывают задачи, где проще использовать эту схему непосредственно.)

Рассмотрим ещё раз задачу из предыдущей статьи.

Задача. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся рёбра перпендикулярны.

Решение. Пусть $ABCD$ — правильная треугольная пирамида. Докажем, что $AD \perp BC$ (рис. 4).

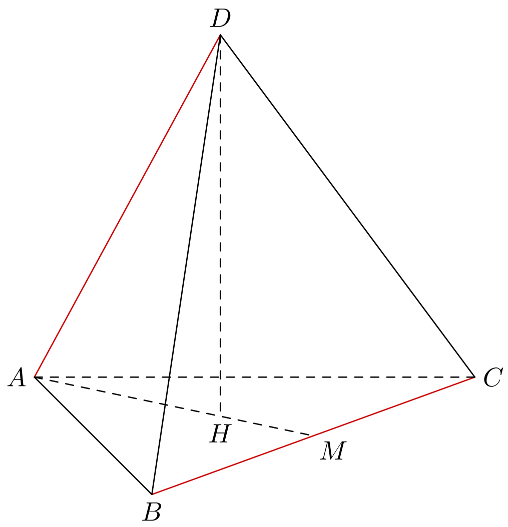

Рис. 4. К задаче

Прямая AD является наклонной к плоскости ABC. Поскольку основание H высоты пирамиды DH лежит на медиане AM треугольника ABC, проекцией наклонной AD на плоскость ABC служит прямая AM.

Прямая BC лежит в плоскости ABC и перпендикулярна проекции наклонной: $BC \perp AM$ (ибо AM есть также и высота равностороннего треугольника ABC). По теореме о трёх перпендикулярах прямая BC перпендикулярна наклонной: $BC \perp AD$.

Другие примеры использования теоремы о трёх перпендикулярах нам ещё неоднократно встретятся при разборе задач.