

Тригонометрические уравнения с радикалами

Этот листок посвящён тригонометрическим уравнениям, в которых тригонометрические функции от неизвестной величины содержатся под знаком корня.

Уравнение вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

(Почему отсутствует неравенство $f(x) \geq 0$? Оно не нужно — ведь выражение $f(x)$ приравнивается к квадрату выражения $g(x)$ и потому автоматически оказывается неотрицательным.)

ЗАДАЧА. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Решите уравнение

$$\sqrt{41 \cos x + 40} + 2\sqrt{5} \sin x = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Будучи переписано в виде

$$\sqrt{41 \cos x + 40} = -2\sqrt{5} \sin x,$$

данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 41 \cos x + 40 = 20 \sin^2 x, \\ \sin x \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Преобразуем уравнение (1):

$$20 \cos^2 x + 41 \cos x + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{5}{4}, \\ \cos x = -\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\pi n, \\ x_2 = -\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Серия x_1 расположена во второй четверти ($\sin x_1 > 0$); для неё неравенство (1) не выполнено. Серия x_2 расположена в третьей четверти ($\sin x_2 < 0$) и удовлетворяет неравенству (1).

ОТВЕТ: $-\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

ЗАДАЧА. («Физтех», 2013) Решите уравнение

$$\sqrt{3 + \frac{25}{2} \sin^2 x} = \sqrt{6} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x.$$

РЕШЕНИЕ. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3 + \frac{25}{2} \sin^2 x = \left(\sqrt{6} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x\right)^2, \\ \sqrt{6} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0, \\ 2\sqrt{3} \cos x - \sin x \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Если положить $\cos x = 0$ в уравнении (2), то получим и $\sin x = 0$ вопреки основному тригонометрическому тождеству. Значит, все решения уравнения (2) удовлетворяют условию $\cos x \neq 0$. Деля обе части уравнения (2) на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение

$$15 \operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, \\ x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{5} + \pi n, \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$$

Решения уравнения (2) записаны в виде двух серий с периодом π каждая. Чтобы удобнее было проверять неравенство (2), представим найденные решения в виде четырёх серий с периодом 2π каждая:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; & x_3 &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi n; \\ x_2 &= \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; & x_4 &= \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} \cos x_1 - \sin x_1 &= 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} > 0; \\ 2\sqrt{3} \cos x_2 - \sin x_2 &= -2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} < 0; \\ 2\sqrt{3} \cos x_3 - \sin x_3 &= 2\sqrt{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{28}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}} > 0; \\ 2\sqrt{3} \cos x_4 - \sin x_4 &= -2\sqrt{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{28}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}} < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, решениями исходного уравнения являются серии x_1 и x_3 .

ОТВЕТ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Уравнение вида

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$

равносильно одной из двух систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Разумеется, достаточно учесть лишь одно из неравенств $f(x) \geq 0$ или $g(x) \geq 0$, поскольку второе из этих неравенств будет выполнено автоматически ввиду уравнения $f(x) = g(x)$. Какое именно выражение сравнивать с нулём — $f(x)$ или $g(x)$ — диктуется исключительно соображениями удобства.

ЗАДАЧА. (МГУ, геологич. ф-т, 2005) Найдите наибольший корень уравнения

$$\sqrt{8 - x - \cos 2x} = \sqrt{10 - x - \sin x}.$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 8 - x - \cos 2x = 10 - x - \sin x, \\ 10 - x - \sin x \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Преобразуем уравнение (3):

$$2 \sin^2 x + \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Теперь неравенство (3) даёт:

$$10 - \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow n \leq \frac{18 - \pi}{4\pi}.$$

Легко убедиться, что наибольшее целое n , удовлетворяющее полученному неравенству, равно 1. Поэтому наибольшее решение нашего уравнения равно $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$.

ОТВЕТ: $\frac{5\pi}{2}$.

Рассмотрим, наконец, уравнение

$$f(x)\sqrt{g(x)} = 0.$$

Тут возможны два случая: 1) $g(x) = 0$, и при этом $f(x)$ определено; 2) $g(x) > 0$, и тогда $f(x) = 0$. Таким образом, имеет место эквивалентность:

$$f(x)\sqrt{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} g(x) = 0, \\ f(x) \text{ определено,} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g(x) > 0, \\ f(x) = 0. \end{array} \right. \end{cases}$$

ЗАДАЧА. (МГУ, ВМК, 1998) Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x \cdot \sqrt{\cos x + 3 \sin x - 1} = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \cos x + 3 \sin x - 1 = 0, \\ \sin x \neq 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos x + 3 \sin x - 1 > 0, \\ \operatorname{ctg} x = 0. \end{array} \right. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим уравнение первой системы (4):

$$\begin{aligned} \cos x + 3 \sin x = 1 &\Leftrightarrow \cos \left(x - \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} + 2\pi n \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} + 2\pi n, \\ x_2 = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Имеем, однако, $\sin x_2 = 0$ вопреки неравенству первой системы (4). Поэтому решением первой системы служит лишь серия x_1 .

Перейдём ко второй системе (4). Её уравнение $\operatorname{ctg} x = 0$ имеет решения

$$x_3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x_4 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Проверяем выполнение неравенства системы:

$$\begin{aligned}\cos x_3 + 3 \sin x_3 - 1 &= 2 > 0; \\ \cos x_4 + 3 \sin x_4 - 1 &= -4 < 0.\end{aligned}$$

Годится, как видим, только серия x_3 . Итак, все решения исходного уравнения даются сериями x_1 и x_3 .

ОТВЕТ: $2 \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. (МГУ, централизованный экзамен, 2010) Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{\operatorname{tg} 3x} = \sqrt{-\operatorname{tg} x},$$

удовлетворяющие неравенству $0 \leq x < \pi$.

$$\frac{\pi}{3}, 0$$

2. (МГУ, мехмат, 1999-03.1) Решите уравнение

$$\sqrt[8]{\frac{1 + \cos 4x}{1 - \cos 4x}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg} \left(\frac{9\pi}{2} - 2x \right)} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{2u} + \frac{\pi}{u} - \frac{\pi}{2u} + \frac{\pi}{u}$$

3. (МГУ, «Математика вместо ЕГЭ», 2011) Решите уравнение:

$$\sqrt{6 \sin x} = 2 \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi u + \frac{\pi}{u}$$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Решите уравнение

$$\sqrt{25 \sin x + 24} + 2\sqrt{3} \cos x = 0.$$

$$\pi + \arcsin \frac{4}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

5. (МФТИ, 1996) Решите уравнение

$$\sqrt{4 + 3 \cos x - \cos 2x} = \sqrt{6} \sin x.$$

$$\pi + 2\pi n, \arccos \frac{4}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

6. (МГУ, ф-т психологии, 2005) Решите уравнение

$$\sqrt{2 \cos^2 x - \sqrt{3}} + \sqrt{2} \sin x = 0.$$

$$-\frac{\pi}{12} + 2\pi n, -\frac{11\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

7. (МГУ, ВМК, 2005) Решите уравнение

$$\sqrt{\operatorname{tg} x + 3} = 5 \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

8. (МГУ, ВМК, 2005) Решите уравнение

$$\sqrt{\operatorname{ctg} x + 1} = -\sqrt{15} \sin x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

9. («Физтех», 2008) Решите уравнение

$$\sqrt{11 - \sqrt{10} \operatorname{ctg} x} + \sqrt{11} \sin x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

10. (МФТИ, 1993) Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{2} + \cos^2 x} = \sin x - \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

11. (МФТИ, 1993) Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{13}{3} + \cos 2x} + \operatorname{ctg} x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

12. (МФТИ, 1994) Решите уравнение

$$\sqrt{17 + 7 \sin 2x} = 3 \sin x + 5 \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

13. («Физтех», 2013) Решите уравнение

$$\sqrt{3 + 4 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\sqrt{3}} + 3 \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

14. («Физтех», 2013) Решите уравнение

$$2\sqrt{7} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{27 + \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

15. (МФТИ, 1991) Решите уравнение

$$\sqrt{5 \operatorname{tg} x + 10} = \frac{5}{2} \sin x + \frac{1}{\cos x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \operatorname{arctg} \frac{x}{1} + \frac{x}{1} \operatorname{arctg} \frac{x}{1} + \frac{x}{1} \operatorname{arctg} \frac{x}{1} -$$

16. (МФТИ, 1991) Решите уравнение

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{2} \sin x} = 2 \cos x - \sqrt{2} \operatorname{tg} x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \operatorname{arctg} \frac{x}{x} -$$

17. (МГУ, ФНМ, 2004) Решите уравнение

$$\sqrt{\cos x - 2 \cos 2x} + \sqrt{2} \cos 2x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \operatorname{arctg} \frac{x}{x} + \frac{x}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{x} + \left(\frac{x}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{x} \right) \operatorname{arctg} \frac{x}{x} + \frac{x}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{x}$$

18. («Физтех», 2011) Решите уравнение

$$\sqrt{8 \operatorname{tg} x + 22 \operatorname{ctg} x} = -\sqrt{15} (\sin x + \cos x).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \operatorname{arctg} \frac{x}{x} + \frac{x}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{x} + \frac{x}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{x}$$

19. (МГУ, ВМК, 1993) На отрезке $0 \leq x \leq \pi$ найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{1 + 2 \cos^2 x} - \sqrt{3} \sin 2x.$$

$$\left[\frac{x}{x}; 0 \right]$$

20. (МГУ, ф-т почвоведения, 1996) Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{x + \sin x} = \sqrt{x - \sin 2x},$$

удовлетворяющие неравенству $-2\pi < x < 2\pi$.

$$\left[\frac{x}{x}, \frac{x}{x}, \frac{x}{x}, 0 \right]$$

21. (МГУ, геологич. ф-т, 2005) Найдите наименьший корень уравнения

$$\sqrt{\cos 2x + x - 11} = \sqrt{x - 15 - 5 \cos x}.$$

$$\frac{x}{x}$$

22. (МГУ, химический ф-т, 1994) Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \operatorname{arctg} \frac{x}{x} + \frac{x}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{x} -$$

23. (МГУ, ф-т почвоведения, 2002) Найдите все значения x , принадлежащие интервалу $(-\pi; \pi)$ и являющиеся решениями уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{-2 \sin x}} = \sqrt{-2 \cos x}.$$

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$$

24. (МГУ, мехмат, 1997) Решите уравнение

$$\sqrt{12 \sin x + 13} = 3 \sin x + 2.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}$$

25. (МГУ, мехмат, 1995) Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 3x} \cdot \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{18}, u\pi + \frac{5\pi}{18}, u\pi + \frac{7\pi}{18}, u\pi + \frac{11\pi}{18}, u\pi + \frac{13\pi}{18}, u\pi + \frac{17\pi}{18}$$

26. (МГУ, мехмат, 1997) Решите уравнение

$$(2 \cos^2 x - \cos x - 1) \sqrt{\operatorname{ctg} x} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}, u\pi + \frac{3\pi}{2}$$

27. (МГУ, ВМК, 1998) Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{\sin x - 2 \cos x - 1} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}, u\pi + \frac{3\pi}{2}, u\pi + \frac{5\pi}{2}, u\pi + \frac{7\pi}{2}, u\pi + \frac{9\pi}{2}, u\pi + \frac{11\pi}{2}, u\pi + \frac{13\pi}{2}, u\pi + \frac{15\pi}{2}, u\pi + \frac{17\pi}{2}, u\pi + \frac{19\pi}{2}$$

28. (МГУ, географич. ф-т, 2000) Решите уравнение

$$\sqrt{4 - 2 \cos^2 x + \sin x + \cos 2x} - \sqrt{\frac{\sin x + 1}{\sin x + 2}} - 1 = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{3}, u\pi + \frac{2\pi}{3}, u\pi + \frac{4\pi}{3}, u\pi + \frac{5\pi}{3}$$

29. (МГУ, ВМК, 2003) Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 3x \cos x} = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{4}, u\pi + \frac{5\pi}{4}, u\pi + \frac{3\pi}{2}, u\pi + \frac{7\pi}{4}$$

30. (МГУ, ВМК, 1999) Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1 + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{8}} = -\sin x \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(u\sqrt{x} + \frac{9x}{x^2} \right) \left(u\sqrt{x} + \frac{9x}{x^2} \right)$$

31. (МГУ, филологич. ф-т, 2002) Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{3}(\cos x - \sin x)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(u\sqrt{x} + \frac{9}{x^2} \right) \left(u\sqrt{x} + \frac{9}{x^2} \right)$$

32. (МГУ, ВМК, 2005) Решите уравнение

$$12 \cos 2x + 8|\sin x| \sqrt{3 + |\sin x| - 3 \cos 2x} = 11.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(u\sqrt{x} + \frac{9}{1+\sqrt{x}} \right) \operatorname{arcsin} \frac{9}{1+\sqrt{x}}$$

33. (МГУ, мехмат, 2003-05.2) Решите уравнение

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \sqrt{5 \cos(2x - \pi) + 8 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} - 5 + \sin \frac{x}{2} \cdot \sqrt{2 \cos x} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(u\sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} \right) \sqrt{\cos x} - \left(u\sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} \right)$$

34. (МГУ, мехмат, 1998) Решите уравнение

$$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{\sin 2x + (\sqrt{3} + 1) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + 3} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(u\sqrt{x} + \frac{2}{1+\sqrt{x}} \right) \sqrt{\sin 2x + (\sqrt{3} + 1) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + 3}$$

35. (МФТИ, 2006) Решите уравнение

$$\sin 3x \sqrt{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left((1 + u\sqrt{x})x + \frac{9}{x} \right) \left(u\sqrt{x} + \frac{9}{x} \right) \left(u\sqrt{x} + \frac{9}{x} \right)$$

36. (МФТИ, 2004) Решить уравнение

$$\cos x \sqrt{1 + \sin x - 2 \cos x} = \cos x - \sin x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(u\sqrt{x} + \frac{2}{1-\sqrt{x}} \right) \operatorname{arcsin} \frac{2}{1-\sqrt{x}}$$

37. (МГУ, мех.мат, 2004-07.4) Решить уравнение

$$\sqrt{-3 \sin 2x} = -2 \sin 2x - \sin x + \cos x - 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, u\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - u, u\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - u\sqrt{2}$$

38. («Покори Воробьёвы горы!», 2016.4) Решите уравнение

$$\left(\sqrt{2} \sin 3x + \sqrt{2 + \cos 3x}\right) \left(2 \cos \left(\sqrt{2} \arcsin x\right) - 1\right) = 0.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \arcsin \mp \frac{6}{\sqrt{2}} - \frac{9}{\sqrt{2}}$$