Параметры и тригонометрия

Задача. (*«Физтех», 2011*) Найдите все значения параметра b, для каждого из которых существует число α такое, что уравнение

$$x^2 + (\cos\alpha - 4\sin\alpha)x + b = 0$$

имеет действительное решение.

Решение. Обозначим $a = \cos\alpha - 4\sin\alpha$; имеем:

$$a = \sqrt{17}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\cos\alpha - \frac{4}{\sqrt{17}}\sin\alpha\right) = \sqrt{17}\cos(\alpha+\varphi),$$

где

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{17}}\,, \quad \sin\varphi = \frac{4}{\sqrt{17}}\,.$$

Когда α пробегает множество $\mathbb{R}$, параметр a пробегает все значения из отрезка $\left[-\sqrt{17}; \sqrt{17}\right]$. Поэтому нашу задачу можно переформулировать следующим образом: найти все значения b, для каждого из которых существует число $a \in \left[-\sqrt{17}; \sqrt{17}\right]$ такое, что уравнение

$$x^2 + ax + b = 0 \tag{1}$$

имеет действительный корень.

Зафиксируем b и предположим, что a пробегает отрезок $\left[-\sqrt{17}; \sqrt{17}\right]$; тогда дискриминант $D = a^2 - 4b$ пробегает отрезок $I = [-4b; 17 - 4b]$. Если $b > \frac{17}{4}$, то $17 - 4b < 0$; отрезок I в этом случае содержит только отрицательные числа, и уравнение (1) не имеет корней. Если же $b \leqslant \frac{17}{4}$, то, например, при $a = \sqrt{17}$ дискриминант неотрицателен: $D = 17 - 4b \geqslant 0$, и потому уравнение (1) имеет действительный корень.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{17}{4}\right]$.

Задачи

1. (*МГУ, мехмат, 1999-07.3*) При каких значениях φ все положительные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \varphi\right) - \cos\left(\frac{3x}{2} + \varphi\right) = \sin\frac{x}{2}\,,$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

$\boxed{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

2. (*«Ломоносов», 2014*) Найдите все значения α, при каждом из которых нули функций

$$f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2} - \alpha\right) \quad \text{и} \quad g(x) = 2\sin 2x - 4\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}$$

строго чередуются на числовой оси.

$\boxed{\pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

3. (*МГУ, мехмат, 2000-07.5*) Найти все a, при которых уравнение

$$(|a|-1)\cos 2x + (1-|a-2|)\sin 2x + (1-|2-a|)\cos x + (1-|a|)\sin x = 0$$

имеет нечетное число решений на интервале $(-\pi;\pi)$.

$\boxed{[0;1) \cup (1;2] \cup \{3\}}$

4. (*«Физтех», 2011*) Найдите все значения параметра b, для каждого из которых существует число α такое, что уравнение

$$x^2 + (2\sin\alpha - \cos\alpha)x - b = 0$$

имеет действительное решение.

$\boxed{[-\frac{5}{4}; +\infty)}$

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019*) При каких значениях a существует b такое, что уравнение

$$\sin^2 b \sin x + \cos^2 b \cos x = a$$

не имеет решений?

$\boxed{a \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \bigcup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)}$

6. (*МГУ, мехмат, 1996*) Найти все a, при которых уравнение

$$2\cos^2 2^{2x-x^2} = a + \sqrt{3}\sin 2^{2x-x^2+1}$$

имеет хотя бы один корень.

$\boxed{a \in [-1;2)}$

7. (*МГУ, мехмат, 1999-03.5*) Найти все значения a из промежутка $[-2;1]$, при каждом из которых расстояние на числовой оси между любыми различными корнями уравнения

$$\sin 2x + |2a+1|\sin x + |a| = 2|a|\cos x + \sin x + \left|2a^2 + a\right|$$

не меньше чем $\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{-2;\ 0;\ 1;\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ \left[-1-\frac{\sqrt{2}}{2}; -1\right]}$

8. (*«Ломоносов», 2006*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos 2x + 2a\cos x + |2a+1| - 2 = 0$$

имеет решения и все его положительные решения образуют арифметическую прогрессию.

$\boxed{\{-2\} \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [2; +\infty)}$

9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Найдите все значения a, при которых расстояние между любыми соседними корнями уравнения

$$3\,\mathrm{tg}\,a \cdot \cos 2x + 3\sqrt{2}\cos 3a \cdot \cos x + 3\,\mathrm{tg}\,a - \mathrm{ctg}\,a = 0$$

меньше либо равно $\pi/2$.

$\boxed{\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

10. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017*) Определите, при каких значениях n и k уравнение

$$\sin x + \sin y = \frac{\pi k}{2017}$$

является следствием уравнения

$$x + y = \frac{\pi n}{48}\,.$$

$\boxed{k = 0;\ n = 96t,\ t \in \mathbb{Z}}$

11. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014*) Для каждого значения a решите уравнение

$$4 - \sin^2 x + \cos 4x + \cos 2x + 2\sin 3x \sin 7x - \cos^2 7x - \cos^2 \pi a = 0.$$

$\boxed{\text{Если } a \in \mathbb{Z}, \text{ то } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}; \text{ если } a \notin \mathbb{Z}, \text{ то решений нет}}$

12. (*«Ломоносов», 2017*) Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно из следующих двух утверждений является истинным:
1) «Уравнение $\cos(\cos x) + \sin(\sin x) = a$ имеет ровно два корня на отрезке $[0; \pi]$»;
2) «Уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x = a$ имеет корни».

$\boxed{\left[-\frac{1}{2}; \cos 1\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 1 + \sin 1\right)}$

13. (*ММО, 2014, 11*) Найдите все значения a, для которых найдутся такие x, y и z, что числа $\cos x$, $\cos y$ и $\cos z$ попарно различны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию, при этом числа $\cos(x+a)$, $\cos(y+a)$ и $\cos(z+a)$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию.

$\boxed{a = \pi n, n \in \mathbb{Z}}$

14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010*) Для каких из перечисленных значений параметра a ($a = -1$, 2010, $\log_2 3$) найдётся такое значение b, что уравнение

$$\cos x + \cos ax = b$$

имеет единственное решение?

$\boxed{\log_2 3}$

15. (*«Ломоносов», 2010*) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 25^x - 13 \cdot 5^x + a < 0, \\ 12\sin^4 \pi x - \cos 4\pi x = 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$\boxed{a < 13\sqrt{5} - 5}$

16. (*МГУ, мехмат, 2003-07.5*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin(\arccos 5x) = a + \arcsin\big(\sin(7x - 3)\big)$$

имеет единственное решение.

$\boxed{\left[\pi - \frac{22}{5}; \pi - \frac{8}{5}\right) \cup \left\{\pi - 3 + \frac{\sqrt{74}}{5}\right\}}$

17. (*МГУ, мехмат, 2002-07.5*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых сумма арктангенсов корней уравнения

$$x^2 + (1 - 2a)x + a - 4 = 0$$

больше $\frac{\pi}{4}$.

$\boxed{(2; +\infty)}$

18. (*МГУ, мехмат, 1998*) Найти все значения k, при которых хотя бы одна общая точка графиков функций

$$y = -\frac{2}{3} - \arcsin x \quad \text{и} \quad y = -\frac{2}{3} - 2\,\mathrm{arctg}\, kx$$

имеет положительную ординату.

$\boxed{\left(\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{3}}; 1\right]}$

19. (*МГУ, мехмат, 2004-03.5*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\mathrm{arctg}\,\Big((3a - 1)\sin^2 x - \big(3a^3 - a^2 + 3a - 1\big)\sin x + \mathrm{tg}(ax - a\pi)\Big) - ax + a\pi = 0$$

имеет ровно три решения.

$\boxed{\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)}$

20. (*МГУ, мехмат, 2005.5*) Пусть X — сумма корней уравнения

$$a\cos x = \sqrt{2} + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

на промежутке $[0; 2\pi)$, а Y — сумма корней уравнения

$$a\cos 2y - 2\sin 2y = a - 3\sin y$$

на том же промежутке. Найти все значения a, при которых $\operatorname{ctg}\frac{X-Y}{2} = \sqrt{3}$.

$\boxed{0,\ 4+2\sqrt{3}}$

21. (*МГУ, мехмат, 2002-03.6*) Найти все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения

$$6\sin\left(2x - \frac{11}{12}\pi a\right) + 6\sin\left(\frac{11}{12}\pi a\right) + 3a^3 - 7a^2 + 3a + 1 =$$
$$= 2\left(3a^2 - 4a - 1\right)\cos\left(x - \frac{11}{12}\pi a\right) + 6(a-1)\sin x,$$

будучи отложенными на тригонометрической окружности, образуют на ней ровно четыре точки, причем эти точки являются вершинами трапеции.

$\boxed{\frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{6}{11},\ \frac{6}{11},\ \frac{18}{11}}$

22. (*МГУ, мехмат, 2003-03.6*) Найти все значения α, при каждом из которых расстояние между любыми двумя соседними корнями уравнения

$$\cos\alpha\cos 3x - \sin 3\alpha\cos x + 2\sin 2\alpha\cos 2x = 3\sin\alpha - \cos 3x$$

не превосходит $\frac{\pi}{3}$

$\boxed{\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

23. (*МГУ, экономич. ф-т, 2006*) Найдите все значения a, при которых неравенство

$$4a^2\cdot\sqrt{2 - \frac{6}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{3} - 2x\right)} + \frac{12a}{\pi}\arccos\left(2x - \sqrt{3}\right) - 8a^2 - 3a \leqslant 1$$

выполняется для любых $x \in \left[\frac{2\sqrt{3}-1}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$.

$\boxed{\left[-1; \frac{1}{4}\right] \cup [1; +\infty)}$

24. (*МГУ, ВМК, 1998*) Найти все значения параметра a, при которых существуют (x, y), удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} \max(2-3y, y+2) \leqslant 5, \\ \sqrt{a^2 + \frac{6}{\pi}\arccos\sqrt{1-x^2} - 16 - \frac{2}{\pi^2}\arcsin x\cdot(\pi + 2\arcsin x)} \geqslant y^2 + 2ay + 7. \end{cases}$$

$\boxed{\left(-\infty; -\sqrt{13}\right] \cup \left[\frac{11}{3}; +\infty\right)}$

25. (*МГУ, ф-т психологии, 1998*) Найти все целые значения параметров a и b, при которых уравнение

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right) - b\cdot 2^{\sin(\pi b x)} - \left|\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right) + b\cdot 2^{\sin(\pi b x)}\right| = 2ab$$

имеет не менее 10 различных решений.

$\boxed{a=-1,\ b=3,4,5,\ldots;\ a=-2,\ b=4,5,6,\ldots}$