Тригонометрические уравнения с модулем

Этот листок посвящён тригонометрическим уравнениям, в которых тригонометрические функции от неизвестной величины содержатся под знаком модуля.

Как правило, модуль приходится снимать по обычным правилам, рассматривая случаи разных знаков тригонометрического выражения под модулем.

Задача. (*«Ломоносов», 2013*) Решить уравнение

$$\sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}\,|\sin x| = 2.$$

Решение. Разделив обе части уравнения на $2\sqrt{2}$, получим:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}|\sin x| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x\cos\frac{\pi}{6} - |\sin x|\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Если

$$\sin x \geqslant 0, \tag{1}$$

то уравнение принимает вид

$$\cos x\cos\frac{\pi}{6} - \sin x\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

с решениями $x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, которые нужно записать в виде двух отдельных серий:

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + 2\pi n, \quad x_2 = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Условию (1) удовлетворяет только серия x_1.

Если же

$$\sin x < 0, \tag{2}$$

то уравнение примет вид

$$\cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

с решениями

$$x_3 = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n, \quad x_4 = -\frac{\pi}{12} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Условию (2) удовлетворяет только серия x_4.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Неискушённые школьники часто начинают *решать* неравенства (1) и (2). Как видите, делать этого не надо. В данном случае достаточно было проверить, какие из полученных решений удовлетворяют указанным неравенствам, а какие — нет.

Задача. (*МФТИ, 2003*) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x\sin 5x + |\cos 5x\sin 3x|}{\cos 2x} = 2\sin 2x.$$

Решение. На множестве

$$E = \{x \in \mathbb{R} \colon \; \cos 2x \neq 0\}$$

имеем равносильное уравнение

$$\cos 3x \sin 5x + |\cos 5x \sin 3x| = \sin 4x. \tag{3}$$

Рассмотрим сначала случай

$$\cos 5x \sin 3x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 8x - \sin 2x \geqslant 0. \tag{4}$$

Из (3) получаем:

$$\cos 3x \sin 5x + \cos 5x \sin 3x = \sin 4x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 8x = \sin 4x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x \cos 6x = 0. \tag{5}$$

Можно решить полученное уравнение и отобрать корни, удовлетворяющие условию (4); для этого, однако, придётся рассмотреть 12 случаев (перебирая все остатки от деления на 12). Мы поступим иначе.

Во-первых, заметим, что промежуточное равенство $\sin 8x = \sin 4x$ из цепочки (5) позволяет заменить условие (4) на равносильное неравенство

$$\sin 4x - \sin 2x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x(2\cos 2x - 1) \geqslant 0.$$

Во-вторых, продолжим преобразование уравнения (5):

$$\sin 2x \cos 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x(4\cos^3 2x - 3\cos 2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x(4\cos^2 2x - 3) = 0$$

(в последнем переходе учтено ограничение $x \in E$). Итак, исходное уравнение на множестве E в рассматриваемом случае равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 2x \left(\cos 2x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos 2x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0, \\ \sin 2x(2\cos 2x - 1) \geqslant 0. \end{cases}$$

Если $\sin 2x = 0$, то $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Все эти значения служат решениями системы.

Если $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то в силу неравенства системы имеем $\sin 2x > 0$, то есть $\sin 2x = \frac{1}{2}$. Отсюда $2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $x = \frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то в силу неравенства системы имеем $\sin 2x < 0$, то есть $\sin 2x = -\frac{1}{2}$. Отсюда $2x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$ и $x = \frac{7\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Две серии $\frac{\pi}{12} + \pi n$ и $\frac{7\pi}{12} + \pi n$ можно объединить в одну: $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$.

Перейдём к случаю

$$\cos 5x \sin 3x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 8x - \sin 2x < 0. \tag{6}$$

Из (3) получаем тогда:

$$\cos 3x \sin 5x - \cos 5x \sin 3x = \sin 4x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x = \sin 4x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x(2\cos 2x - 1) = 0.$$

С учётом промежуточного равенства $\sin 2x = \sin 4x$ имеем вместо (6) равносильное неравенство

$$\sin 8x - \sin 4x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x \cos 6x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x(4\cos^3 2x - 3\cos 2x) < 0.$$

Таким образом, исходное уравнение на множестве E в рассматриваемом случае равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 2x(2\cos 2x - 1) = 0, \\ \sin 2x(4\cos^3 2x - 3\cos 2x) < 0. \end{cases}$$

Из уравнения системы получаем $\cos 2x = \frac{1}{2}$, и тогда из неравенства системы имеем $\sin 2x > 0$, то есть $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ и $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

В некоторых ситуациях не следует торопиться снимать модуль с тригонометрического выражения.

Задача. (*«Физтех», 2015*) Решите уравнение

$$\left(\frac{7}{4} - 2\cos 2x\right)|2\cos 2x + 1| = \cos x(\cos x - \cos 5x).$$

Решение. Данное уравнение сводится к алгебраическому с помощью замены $t = \cos 2x$. В самом деле, удвоенная правая часть равна

$$2\cos^2 x - 2\cos x\cos 5x = 1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 6x = 1 + t - (2t^2 - 1) - (4t^3 - 3t) = \\ = 2 + 4t - 2t^2 - 4t^3 = (2t+1)(2-2t^2).$$

Уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{7}{2} - 4t\right)|2t + 1| = (2t+1)(2-2t^2). \qquad (7)$$

Значение $t = -\frac{1}{2}$ является корнем уравнения (7).

Пусть $2t + 1 > 0$. Снимая модуль и сокращая на ненулевой множитель $2t + 1$, приходим к уравнению

$$\frac{7}{2} - 4t = 2 - 2t^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 - 4t + \frac{3}{2} = 0$$

с корнями $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = \frac{3}{2}$. Корень t_2 мы отбросим, так как $t_2 > 1$.

Пусть теперь $2t + 1 < 0$. Действуя аналогично, приходим к уравнению

$$2t^2 + 4t - \frac{11}{2} = 0$$

с корнями $t_3 = \frac{-2-\sqrt{15}}{2} < -1$ и $t_4 = \frac{-2+\sqrt{15}}{2} > -\frac{1}{2}$. Оба они не годятся.

Итак, имеем $t = \pm\frac{1}{2}$ и легко получаем ответ.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. (*«Ломоносов», 2013*) Решить уравнение

$$\sqrt{6}\sin x + \sqrt{2}\,|\cos x| = 2.$$

$\boxed{\frac{\pi}{12} + 2\pi n,\ \frac{11\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

2. (*МФТИ, 1993*) Решить уравнение

$$\sin 3x + |\sin x| = \sin 2x.$$

$\boxed{\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

3. (*МФТИ, 1993*) Решить уравнение

$$|\cos x| - \cos 3x = \sin 2x.$$

$\boxed{\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

4. (*«Физтех», 2010*) Решить уравнение

$$\sin 3x - 3|\sin x| = \cos 4x - \cos 2x.$$

$\boxed{\pi n,\ (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

5. (*«Физтех», 2010*) Решить уравнение

$$3|\cos x| + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0.$$

$\boxed{\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \pm\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

6. (*«Физтех», 2015, 10–11*) Решите уравнение

$$\frac{|\cos x| + \cos 3x}{\sin x\cos 2x} = -2\sqrt{3}\,.$$

$\boxed{\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

7. (*«Физтех», 2015, 10–11*) Решите уравнение

$$\frac{|\sin x| + \sin 3x}{\cos x\cos 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

$\boxed{\frac{\pi}{12}+2\pi n,\ \frac{7\pi}{12}+2\pi n,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

8. (*«Физтех», 2015, 11*) Решите уравнение

$$\left(\frac{7}{2}\cos 2x + 2\right)|2\cos 2x - 1| = \cos x(\cos x + \cos 5x).$$

$\boxed{\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}}$

9. (*«Физтех», 2015, 11*) Решите уравнение

$$\frac{1}{2}\left|\cos 2x + \frac{1}{2}\right| = \sin^2 x + \sin x\sin 5x.$$

$\boxed{\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}}$

10. (*«Физтех», 2016, 11*) Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{2\cos 3x}{\cos x} = 5|\sin x|.$$

$\boxed{\pm \arcsin \frac{1}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

11. (*«Физтех», 2016, 11*) Решите уравнение

$$\frac{3\sin 3x}{\sin x} - \frac{2\cos 3x}{\cos x} = 7|\cos x|.$$

$\boxed{\pm \arccos \frac{3}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

12. (*«Физтех», 2016, 11*) Решите уравнение

$$\frac{\cos 5x - \cos 7x}{\sin 4x + \sin 2x} = 2|\sin 2x|.$$

$\boxed{-\arccos\left(\pm\frac{\sqrt{13}-1}{4}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

13. (*МФТИ, 2004*) Решить уравнение

$$\cos 3x + \cos 2x = 3|\cos x| - \cos 4x.$$

$\boxed{2\pi n,\ \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

14. (*МФТИ, 2004*) Решить уравнение

$$\sin 3x + \cos 2x = \cos 4x - 3|\sin x|.$$

$\boxed{\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

15. (*МФТИ, 2003*) Решить уравнение

$$\sin x + |\cos x| = \sin 4x + \cos 2x.$$

$\boxed{-\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \pi + 2\pi n,\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

16. (*МФТИ, 2003*) Решить уравнение

$$\cos x + |\sin x| + \sin 4x = -\cos 2x..$$

$\boxed{\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \pi + 2\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

17. (*«Ломоносов», 2011*) Найдите все решения уравнения

$$|\sin 2x - \cos x| = \big||\sin 2x| - |\cos x|\big|$$

на промежутке $(-2\pi; 2\pi]$.

$\boxed{(-2\pi; -\pi] \cup [0; \pi] \cup \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}}$

18. (*«Ломоносов», 2014*) Найдите наименьший корень уравнения

$$|\sin 2\pi x + \cos \pi x| = \big||\sin 2\pi x| - |\cos \pi x|\big|,$$

принадлежащий промежутку $\left(-2; -\frac{1}{4}\right)$.

$\boxed{-1{,}5}$

19. (*«Ломоносов», 2009*) Сколько решений на отрезке $[0; \pi]$ имеет уравнение

$$5 \sin x + 4 = |5 \cos x + 2|?$$

$\boxed{\text{Одно решение}}$

20. (*МГУ, мехмат, 2001-07.2*) Имеет ли уравнение

$$12 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = |4 - 5 \cos x|$$

хотя бы одну пару корней, расстояние между которыми не превосходит $\frac{\pi}{2}$?

$\boxed{\text{Нет}}$

21. (*ОММО, 2009*) Найдите сумму всех корней уравнения

$$2 \cos 3x + 8|\sin x| - 7 = 0,$$

принадлежащих отрезку $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

$\boxed{0}$

22. (*МГУ, «Математика вместо ЕГЭ», 2009*) Решить уравнение

$$\sin 2x + \cos 2x = |\sin 2x|^{-1}.$$

$\boxed{\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \frac{\pi}{8} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

23. (*МГУ, экономический ф-т, 2008*) Решить уравнение

$$\frac{|\sin x|}{\operatorname{tg} x} = \cos 3x.$$

$\boxed{-\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

24. (*МГУ, ф-т гос. управления, 2006*) Решите уравнение

$$\sin |1 - 2x| + \cos x = 0.$$

$\boxed{1 \pm \frac{\pi}{2} \mp 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

25. (*«Физтех», 2008*) Решить уравнение

$$\frac{\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x}{|\cos 2x|}=\frac{3}{4}\,.$$

$\boxed{\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}}$

26. (*«Физтех», 2008*) Решить уравнение

$$\frac{\sin^3 x\cos 3x-\cos^3 x\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 6x}{|\sin x|}=\frac{3}{4}\,.$$

$\boxed{-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

27. (*МФТИ, 2007*) Решить уравнение

$$\sin 2x=2\sin^3|x|+\sin 2x\cos x.$$

$\boxed{\pi n,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\ (k\leqslant -1),\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi k\ (k\leqslant 0),\ k,n\in\mathbb{Z}}$

28. (*МФТИ, 2007*) Решить уравнение

$$2\cos 2x=2\cos^3 x+\sin 2x\sin|x|.$$

$\boxed{2\pi n,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\ (k\geqslant 0),\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi k\ (k\geqslant 1),\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\ (k\leqslant -1),\ k,n\in\mathbb{Z}}$

29. (*«Физтех», 2007*) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x+4\sin^2 x-1}{\cos x-1}=|\cos x|.$$

$\boxed{\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

30. (*«Физтех», 2007*) Решить уравнение

$$\frac{\sin 9x+4\sin^2 3x-3}{1-\sin 3x}=|\sin 3x|.$$

$\boxed{\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}}$

31. (*МФТИ, 2004*) Решить уравнение

$$\frac{\sin 6x}{|\sin 4x|}=\frac{\cos 3x}{\cos x}\,.$$

$\boxed{\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

32. (*МФТИ, 2004*) Решить уравнение

$$\frac{2\sin 3x}{\sin x}=\frac{|\cos 6x|}{\cos 2x}\,.$$

$\boxed{\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{6}}{2}+\pi n,\ \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

33. (*МФТИ, 1995*) Решить уравнение

$$\frac{2\sin 3x + \sin 5x}{|\sin x|} = 1.$$

$\boxed{\alpha + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right\}}$

34. (*МФТИ, 1995*) Решить уравнение

$$\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\cos 3x - \cos 5x}{|\cos x|} = \sqrt{3}\,.$$

$\boxed{\alpha + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \left\{0, \pm\frac{\pi}{12}, \pm\frac{3\pi}{4}\right\}}$

35. (*МФТИ, 1998*) Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{|\sin x|} + \frac{3\sin x}{\sin 3x} = -2.$$

$\boxed{-\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

36. (*МФТИ, 1998*) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} + \frac{2|\cos x|}{\cos 3x} = -1.$$

$\boxed{\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

37. (*МФТИ, 1999*) Решить уравнение

$$\sqrt{2} + \cos x - |\sin x| = 2\sqrt{2}\sin^2 x.$$

$\boxed{\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \pm\frac{11\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

38. (*МФТИ, 1999*) Решить уравнение

$$2 + \sqrt{3}\sin 2x - |\cos 2x| = 4\sin^2\frac{x}{2}\,.$$

$\boxed{-\frac{\pi}{9} + 2\pi n,\ \frac{4\pi}{9} + 2\pi n,\ \frac{11\pi}{9} + 2\pi n,\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

39. (*МФТИ, 2001*) Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x = 4|\cos x|.$$

$\boxed{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ -\frac{3\pi}{10} + \pi n,\ \frac{\pi}{10} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

40. (*МФТИ, 2001*) Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\,.$$

$\boxed{-\frac{3\pi}{14} + \pi n,\ \frac{\pi}{14} + \pi n,\ \frac{5\pi}{14} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

41. (*МФТИ, 2001*) Решить уравнение

$$\frac{\cos 4x - \cos 3x + \cos 2x - \cos x}{\sin 4x - \sin 3x - \sin 2x + \sin x} = \frac{\sqrt{2}\,|2\cos^2 x - 1|}{\sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}\,.$$

$-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ -\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

42. (*МФТИ, 2003*) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x \cos 5x + |\sin 5x \sin 3x|}{\sin 2x} = 2\cos 2x.$$

$\frac{\pi}{12} + \pi n,\ \frac{13\pi}{24} + \pi n,\ \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

43. (*МФТИ, 2003*) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x \sin 5x + |\cos 5x \sin 3x|}{\cos 2x} = 2\sin 2x.$$

$\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

44. (*МГУ, мехмат, 2007.3*) Решить уравнение

$$3\cos x \cdot |3\sin x + \cos x| = \sin x \cdot |\cos x - 3\sin x|.$$

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{5} + \pi n = \operatorname{arctg}\frac{5+\sqrt{34}}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

45. (*МГУ, мехмат, 2006.4*) Решить уравнение

$$|1 - 2\sin x + \cos x| + 2\sin x + 1 = \cos 2x.$$

$\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

46. (*МГУ, мехмат, 2001-05.4*) Решить уравнение

$$|\cos 2x \sin 6x| + |\cos 6x \sin 2x| = \sin\frac{3\pi}{11}\,.$$

$\pm\frac{3\pi}{88} + \frac{\pi}{4}n,\ n \in \mathbb{Z}$

47. (*«Ломоносов», 2007*) Найдите все значения $x \in (-\pi; 0]$, удовлетворяющие уравнению

$$|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| + \operatorname{tg} 3x = 0.$$

$-\frac{2\pi}{3},\ -\frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{6} < x \leqslant 0$