

Преобразования тригонометрических уравнений

Данный листок является непосредственным продолжением материалов «Тригонометрические уравнения. 1» и «Тригонометрические уравнения. 2». В нём рассматриваются тригонометрические уравнения, при решении которых используются тождественные преобразования тригонометрических выражений. Эти уравнения предлагались в разные годы на вступительных экзаменах в МГУ, МФТИ и различных олимпиадах.

ЗАДАЧА. (МГУ, филологич. ф-т, 2007) Решите уравнение

$$6 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + 5 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 1 = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Пользуясь формулой приведения $\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$, получаем:

$$\sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{3} - 2x \right) = \cos \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right).$$

Уравнение принимает вид

$$6 \cos \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right) + 5 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 1 = 0$$

Делаем замену $t = \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$:

$$6(1 - 2t^2) + 5t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12t^2 - 5t - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = 1, \\ t = -\frac{7}{12}. \end{cases}$$

Дальнейшее очевидно.

ОТВЕТ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{7}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

ЗАДАЧА. (МФТИ, 2003) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} (2 \cos^2 x - \sin^2 x \cos 2x - 1) = 1.$$

РЕШЕНИЕ. Преобразуем выражение в скобках:

$$2 \cos^2 x - \sin^2 x \cos 2x - 1 = \cos 2x - \sin^2 x \cos 2x = \cos 2x \cos^2 x.$$

Наше уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 3x \cos 2x \cos x = 1, \\ \cos x \neq 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cos 3x \cos 2x \cos x = 1, \quad (1)$$

поскольку для любого x , удовлетворяющего уравнению (1), неравенство системы выполнено. Так как косинус по модулю не превосходит единицы, необходимым условием равенства в уравнении (1) является $|\cos x| = 1$, то есть $x_1 = 2\pi n$ или $x_2 = \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Непосредственной проверкой убеждаемся, что x_1 и x_2 служат решениями уравнения (1).

ОТВЕТ: $\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

ЗАДАЧА. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Решить уравнение

$$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(17x + \frac{\pi}{4}\right).$$

РЕШЕНИЕ. Пользуемся формулой приведения $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ и превращаем разность синусов в произведение:

$$0 = \sin\left(17x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(17x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) = 2 \sin 14x \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right),$$

что равносильно совокупности

$$\begin{cases} 14x = \pi n, \\ \frac{\pi}{4} + 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\frac{\pi n}{14}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

ЗАДАЧА. (МФТИ, 1999) Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x - \cos x}{\cos 3x - \sin 5x} = 1.$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 3x - \cos x = \cos 3x - \sin 5x, \\ \sin 3x - \cos x \neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Преобразуем уравнение (2):

$$\begin{aligned} \sin 3x + \sin 5x = \cos 3x + \cos x &\Leftrightarrow 2 \sin 4x \cos x = 2 \cos 2x \cos x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos x(\sin 4x - \cos 2x) = 0 &\Leftrightarrow \cos x \cos 2x(2 \sin 2x - 1) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (2) равносильно совокупности

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos 2x = 0, \\ \sin 2x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). При таких значениях x имеем $\sin 3x = \pm 1$; неравенство системы (2) выполнено, и данные значения x являются решениями исходного уравнения.

Если $\cos 2x = 0$, то $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$). Чтобы проверить неравенство (2), разобьём данное множество значений x на четыре серии, в каждой из которых значения отличаются на $2\pi n$.

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n &\Rightarrow \sin 3x_1 - \cos x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0; \\ x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n &\Rightarrow \sin 3x_1 - \cos x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0; \\ x_3 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n &\Rightarrow \sin 3x_1 - \cos x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0; \\ x_4 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n &\Rightarrow \sin 3x_1 - \cos x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0. \end{aligned}$$

Как видим, годятся лишь x_2 и x_3 . Их можно объединить в одну серию: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

Наконец, если $\sin 2x = \frac{1}{2}$, то $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$). Тем же способом, что и выше, убеждаемся, что все эти значения x удовлетворяют неравенству (2).

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

ЗАДАЧА. («Физтех», 2010) Решить уравнение

$$\frac{\sin 7x \cos x - \sin 5x \cos 3x}{\cos 2x - \sin 2x} = 0.$$

РЕШЕНИЕ. При ограничении

$$\cos 2x - \sin 2x \neq 0 \quad (3)$$

данное уравнение равносильно уравнению

$$\begin{aligned} 2 \sin 7x \cos x - 2 \sin 5x \cos 3x = 0 &\Leftrightarrow \sin 8x + \sin 6x - (\sin 8x + \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin 6x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x \cos 4x = 0. \end{aligned}$$

Если $\sin 2x = 0$, то $x = \frac{\pi n}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$). При этих значениях x имеем $\cos 2x = \pm 1$, так что неравенство (3) выполнено.

Пусть теперь $\cos 4x = 0$, то есть

$$0 = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x).$$

При ограничении (3) это равносильно

$$\cos 2x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

откуда $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

ОТВЕТ: $\frac{\pi n}{2}$, $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

ЗАДАЧА. (МФТИ, 2002) Решить уравнение

$$\cos^2 x + \cos^2 2x = 1 + \operatorname{ctg} 3x.$$

РЕШЕНИЕ. Пользуемся формулами понижения степени:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} = 1 + \operatorname{ctg} 3x &\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x = 2 \operatorname{ctg} 3x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cos 3x \cos x = 2 \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \Leftrightarrow \cos 3x \left(\cos x - \frac{1}{\sin 3x} \right) = 0. \end{aligned}$$

При ограничении

$$\sin 3x \neq 0 \quad (4)$$

уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} \cos 3x = 0, \\ \cos x \sin 3x = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Если $\cos 3x = 0$, то $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$ ($n \in \mathbb{Z}$). При этом $\sin 3x = \pm 1$, так что неравенство (4) выполнено.

Пусть теперь $\cos x \sin 3x = 1$. Так как косинус и синус по модулю не превосходят единицы, данное равенство может быть выполнено только при $|\cos x| = 1$, то есть при $x = \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Но при таких x имеем $\sin 3x = 0$. Следовательно, второе уравнение совокупности (5) не имеет решений.

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$

ЗАДАЧА. («Физтех», 2009) Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x + 2 \cos x} = \operatorname{ctg}^2 x.$$

РЕШЕНИЕ. Преобразуем левую часть, используя формулы тройного угла:

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x + 2 \cos x} = \frac{3 \sin x - 4 \sin^3 x}{(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 2 \cos x} = \frac{\sin x (3 - 4(1 - \cos^2 x))}{\cos x (4 \cos^2 x - 1)} = \frac{\sin x (4 \cos^2 x - 1)}{\cos x (4 \cos^2 x - 1)}.$$

Поэтому при ограничении

$$4 \cos^2 x - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x \neq -\frac{1}{2} \tag{6}$$

наше уравнение равносильно

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}^3 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} x = 1,$$

откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Легко видеть, что эти значения x удовлетворяют неравенству (6).

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

ЗАДАЧА. (МФТИ, 2007) Решить уравнение

$$11 + \cos 8x = -12 \frac{\cos 4x}{\sin 3x} - 10 \operatorname{ctg}^2 3x.$$

РЕШЕНИЕ. Преобразуем левую часть:

$$11 + \cos 8x = 11 + 2 \cos^2 4x - 1 = 10 + 2 \cos^2 4x.$$

При ограничении

$$\sin 3x \neq 0 \tag{7}$$

наше уравнение равносильно уравнению

$$\begin{aligned} (5 + \cos^2 4x) \sin^2 3x + 6 \cos 4x \sin 3x + 5 \cos^2 3x = 0 & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos^2 4x \sin^2 3x + 6 \cos 4x \sin 3x + 5 = 0. \end{aligned}$$

Замена $t = \cos 4x \sin 3x$ приводит к квадратному уравнению $t^2 + 6t + 5 = 0$ с корнями $t = -1$ и $t = -5$. Поскольку синус и косинус не превосходят по модулю единицу, уравнение $\cos 4x \sin 3x = -5$ не имеет решений. Остаётся рассмотреть уравнение

$$\cos 4x \sin 3x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x - \sin 7x = 2,$$

которое (опять-таки по причине того, что модуль синуса не более 1) равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 7x = -1. \end{cases}$$

Решения первого уравнения системы суть $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$); легко видеть, что они удовлетворяют и второму уравнению, а также ограничению (7). Следовательно, эти значения x служат решениями исходного уравнения.

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Задачи

1. (МГУ, ДВИ, 2012.4) Решите уравнение

$$\sin 3x = \sqrt{2} \cos x - \sin x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \varphi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \in \mathbb{Z} \ni u \left(u + \frac{\pi}{4} \right)$$

2. (МГУ, ДВИ, 2013.4) Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin 5x} - \frac{\cos x}{\cos 5x}.$$

$$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z} \ni u \left(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z} \ni \varphi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = x \right)$$

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin \pi x = -\sqrt{3} \cos \frac{\pi x}{2}.$$

$$\frac{\pi}{2}$$

4. (ОММО, 2011) Решите уравнение $2|x + 2| \cos x = x + 2$.

$$\mathbb{Z} \ni u \left(0 \leq u \left(u + \frac{\pi}{2} \right) \neq 0 \geq u \left(u + \frac{\pi}{2} \right) - 1 \geq u \left(u + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

5. (МГУ, мехмат, 2004-03.1) Найдите сумму тангенсов всех таких $x \in (-\pi; \pi)$, что

$$\sin 2x + 5 \cos 2x = 3.$$

$$\frac{\pi}{4}$$

6. (МГУ, филологич. ф-т, 2007) Решить уравнение

$$5 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = 4 \sin \left(\frac{5\pi}{6} - x \right) - 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(u + \frac{\pi}{6} \right) \in \mathbb{Z} \ni u \left(u + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{6} - \left(u + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\pi}{6}$$

7. (МФТИ, 2006) Решить уравнение

$$\left(\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x \right)^2 = 7 + 3 \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(u + \frac{\pi}{6} \right)$$

8. (МГУ, централизованный экзамен, 2009) Решить уравнение

$$2 \cos^2 x - 5 \sin 2x + \frac{6t}{\pi} = 0,$$

где $t = \arccos\left(\cos \frac{23\pi}{3}\right) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{8} \text{ и } \arctan\left(u\pi + \frac{\pi}{x}\right)$$

9. (МГУ, «Математика вместо ЕГЭ», 2010) Решите уравнение

$$2 \sin^4 x + 7 \cos^3 x = 2.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2} \text{ и } u\pi + \frac{\pi}{x}$$

10. (МГУ, ИСАА, 2005) Решите уравнение

$$\cos 4x = 4 \cos x \cos 2x - 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2} \text{ и } \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{x}\right)$$

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Решите уравнение

$$\frac{\cos 4x - 6 \cos^2 2x + 8 \cos^2 x}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} = 0.$$

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$$

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите уравнение

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cos^4 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{2x} + \frac{\pi}{x}$$

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Сколько различных решений на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет уравнение

$$6\sqrt{2} \cos x \operatorname{ctg} x - 2\sqrt{2} \operatorname{ctg} x - 3 \cos x + 1 = 0?$$

Найдите эти решения.

$$\frac{\pi}{1} \text{ для решения; } \pm \arccos \frac{3}{1}$$

14. (МФТИ, 2003) Решить уравнение

$$\frac{\cos 5x}{\cos x} (1 - 2 \sin^2 x - \sin^2 x \cos 2x) = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi$$

15. («Физтех», 2014) Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{3} \cos x}{\sin x + \cos x} = \operatorname{tg} 2x + \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}$$

16. («Физтех», 2014) Решите уравнение

$$\frac{\cos x \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{9 \cos^2 x + 7 \sin^2 x - 8} - \frac{\cos x \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{8 - 7 \cos^2 x - 9 \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}$$

17. («Физтех», 2020, 11) Решите уравнение

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \varphi, \frac{11}{4\sqrt{x}} + \frac{11}{\sqrt{x}} = x, \frac{x}{4\sqrt{x}} + \frac{11}{\sqrt{x}} = x, \frac{x}{4\sqrt{x}} + \frac{82}{\sqrt{x}} = x$$

18. («Физтех», 2020, 11) Решите уравнение

$$\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}.$$

$$\mathbb{Z} \ni d, \mathbb{Z} \ni \varphi, \varphi + d \neq 11d \neq \varphi, k \frac{11}{4\sqrt{x}} + \frac{11}{\sqrt{x}} = x$$

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2017) Решите уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{12}{\cos 2x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{x}{u} + \frac{11}{\sqrt{x}}$$

20. (МФТИ, 1993) Найдите все решения уравнения

$$\frac{\sin 6x}{\sin x - \cos x} = \frac{\cos 6x}{\cos x + \sin x},$$

принадлежащие интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

$$-\frac{20}{\pi} - \frac{9\pi}{20}$$

21. (МФТИ, 1994) Решить уравнение

$$\frac{2 \cos x + \sin^2 x}{\operatorname{ctg} x - \sin 2x} = \operatorname{tg} 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}} \operatorname{arccos} \frac{x}{1}$$

22. (МФТИ, 2002) Решить уравнение

$$\frac{3 + 4 \cos 2x - 8 \cos^4 x}{\sin 2x - \cos 2x} = \frac{1}{\sin 2x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(\frac{z}{ux} + \frac{v}{x} \right)$$

23. (МГУ, экз. для иностр. гр-н, 2010) Решите уравнение

$$\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(u \right)$$

24. (МГУ, физический ф-т, 2007) Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x - \sin 3x}{2 \sin x} = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(u \right) + \frac{z}{x}$$

25. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Решить уравнение

$$\sin \left(14x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(20x + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(\frac{z}{ux} + \frac{z1}{x} - \frac{z1}{ux} \right)$$

26. (МГУ, химический ф-т, 2006) Решить уравнение

$$\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = -\sqrt{6} \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(u \right) + \frac{z1}{x} \mp \frac{z}{x} \left(u \right) + \frac{z}{x}$$

27. (МФТИ, 1999) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x + \sin 5x}{\cos x + \sin 3x} = -1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(\frac{z}{ux} + \frac{z1}{x} \right)_{1+u} \left(1- \right) \left(u \right) + \frac{v}{x} \left(u \right) + \frac{z}{x}$$

28. (МФТИ, 2006) Решить уравнение

$$5 \sin 3x + 16 \cos x + 5 \sin x = 12 \cos^3 x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(u \right) + \frac{v}{x} \text{ где } - \left(u \right) + \frac{v}{x} - \left(u \right) + \frac{z}{x}$$

29. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Решить уравнение

$$\frac{\cos 5x + \cos x}{\cos 4x + \cos 2x} = \frac{1 + \cos 4x}{\cos x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \left(\frac{z}{ux} + \frac{v}{x} \right)$$

30. («Физтех», 2012) Решите уравнение

$$\cos^2 2x + \cos^2 4x = 1 + \operatorname{ctg} 6x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{9}{u^2} + \frac{61}{u}$$

31. (МФТИ, 2002) Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1 - \frac{\cos 3x}{\cos 2x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{8}{u^2} + \frac{9}{u}, u\sqrt{2}$$

32. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Решить уравнение

$$6 \cos 9x \cos 2x = 1 + 3 \cos 11x + 2 \cos^3 7x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{1}{u^2} + \frac{7}{1-\sqrt{3}} \operatorname{arccos} \frac{1}{2} \mp \frac{1}{u^2}$$

33. («Физтех», 2010) Решить уравнение

$$\frac{\sin 5x \cos 3x - \sin 7x \cos x}{\cos 2x + \sin 2x} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{7}{u^2} + \frac{8}{u}, \frac{7}{u^2}$$

34. («Физтех», 2009) Найти решения уравнения

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} + 8 \sin x \sin 3x = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x \geq 0$.

$$\left(\frac{8}{2}\right) \operatorname{arccos} \frac{1}{2} = \alpha, \mathbb{Z} \ni u, u\sqrt{2} + \alpha - u, u\sqrt{2} + \alpha \mp \frac{7}{2}, \alpha + 2\pi n, \alpha + 2\pi n, \alpha + 2\pi n$$

35. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите сумму корней уравнения

$$\cos^2 x + \cos^2 3x - 2 \cos x \cos 2x \cos 3x = \sin^2 4x,$$

принадлежащих отрезку $[\pi; 2\pi]$. В ответе укажите целое число, наиболее близкое к найденной сумме.

$$\boxed{33}$$

36. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите все общие точки графиков

$$y = 8 \cos \pi x \cdot \cos 2\pi x \cdot \cos^2 4\pi x \quad \text{и} \quad y = \cos 11\pi x$$

с абсциссами, принадлежащими отрезку $[0; 1]$. В ответе укажите сумму абсцисс найденных точек.

$$\boxed{4,5}$$

37. (МФТИ, 1997) Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8 \sin x \sin 3x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{ux} + \frac{8}{x}, ux$$

38. (МФТИ, 2000) Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 5x}{\sin^2 x} = 24 \cos 2x + \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{7}{ux} + \frac{\pi}{x}$$

39. (МГУ, ф-т психологии, 2006) Решить уравнение

$$9 \cos 2x + 9 \cos 6x = 36 \cos x \cos 3x + 140\sqrt{3} \sin x \sin 2x - 162.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, ux + \frac{8}{\sqrt{3}} \arccos \frac{\pi}{x}$$

40. (ОММО, 2012) Найдите сумму всех различных корней уравнения

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0,$$

принадлежащих интервалу $(0; \pi)$.

$$\frac{5}{\pi 11}$$

41. (МГУ, ИСАА, 2006) Решите уравнение:

$$3 + 6 \cos 2x + 3 \cos 4x + 2 \cos 6x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, ux + \left(\frac{\pi}{8} - \arccos \frac{2}{3}\right) + \frac{\pi}{ux} + \frac{\pi}{x}$$

42. («Физтех», 2009) Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\sin 3x - 2 \sin x} = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, ux + \frac{\pi}{x}$$

43. (МФТИ, 2008) Решить уравнение

$$\frac{4 \cos 4x \cos^2 2x - 3 \cos 2x - \cos 6x}{2 \sin^2 x - 1} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{8}{ux}$$

44. (МГУ, геологич. ф-т, 2006) Найдите корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3}(\sin 2x + \cos 3x)}{\cos 2x - \sin 3x} = 1,$$

расположенные в интервале $(1; 2)$.

$\frac{08}{\pi 11}$

45. (МГУ, геологич. ф-т, 2008) Найти корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3} \sin 2x - 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \cos 2x}{\cos \left(x - \frac{7\pi}{3}\right)} = 0,$$

расположенные на промежутке $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

$\frac{7}{\pi 2}$

46. (МГУ, географич. ф-т, 2006) Решить уравнение

$$2 \sin x - \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}, u\pi + \pi$

47. (МФТИ, 2007) Решить уравнение

$$9 + \cos 12x = 10 \frac{\cos 6x}{\sin 5x} - 8 \operatorname{ctg}^2 5x.$$

$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}$

48. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Определите, сколько корней на промежутке $[-\pi; \pi]$ имеет уравнение

$$\frac{2 \cos 4x + 1}{2 \cos x - \sqrt{3}} = \frac{2 \sin 4x - \sqrt{3}}{2 \sin x - 1},$$

и найдите эти корни.

$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{3}, u\pi + \frac{2\pi}{3}$

49. (МФТИ, 1993) Найдите все решения уравнения

$$\frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{\sin 6x} = \frac{\sqrt{3} \cos x + \sin x}{\cos 6x},$$

принадлежащие интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$\frac{08}{\pi 11}$

50. (МГУ, химический ф-т, 2005) Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} 4x + \cos 5x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{9}{uv} + \frac{01}{x}$$

51. («Физтех», 2012) Найдите наименьший корень уравнения

$$\operatorname{ctg} 6x - \operatorname{tg} 5x = \frac{1}{\cos 5x},$$

принадлежащий отрезку $[\frac{8\pi}{17}; \frac{40\pi}{17}]$.

$$\frac{13}{x16}$$

52. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Решите уравнение

$$6 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x + 5 \operatorname{ctg} 3x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, uv + \frac{6}{1} \operatorname{ctg} \frac{2}{1} \mp uv + (\frac{5}{1} -) \operatorname{ctg} \frac{3}{1} \mp$$

53. («Физтех», 2010) Решить уравнение

$$\frac{\sin 2x \cos 10x - \sin 4x \cos 8x}{\cos 2x} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{2}{uv} + \frac{21}{x} \mp \frac{2}{uv}$$

54. (МГУ, ф-т биоинженерии и биоинформатики, 2010)

а) Решите уравнение

$$\frac{9(\sin x + \cos x)^2}{\cos 2x} + \frac{32(1 + 7 \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} 4x)}{\operatorname{tg} x + 7 \operatorname{tg} 4x} + 7 = 0.$$

б) Найдите сумму всех корней этого уравнения, принадлежащих отрезку $[0; 120\pi]$, и выясните, что больше: эта сумма или число 23040.

$$\text{a) } \arctg 4 \neq \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 0 \operatorname{tg} 1 + 120 \operatorname{arctg} 1 + 1140\pi > 23040 \quad \text{б) } \mathbb{Z} \ni u, uv + 1 \neq \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 0 \operatorname{tg} 1 + 120 \operatorname{arctg} 1 + 1140\pi > 23040$$

55. (МГУ, ВМК, 2007) Найдите все решения уравнения

$$2 \sin \left(x + \frac{7\pi}{25} \right) \cdot \sin \left(3x + \frac{18\pi}{25} \right) = \cos 4x + 2^{\cos \frac{2\pi}{3}},$$

принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{10}; \frac{4\pi}{5}]$.

$$\frac{19}{x131} - \frac{20}{x200}$$

56. («Физтех», 2009) Найти решения уравнения

$$\frac{\sin x}{\cos 3x} + \frac{\cos 5x}{\sin x} + 4(\sin 4x + \sin 2x) = 8 \cos x \sin 3x,$$

удовлетворяющие неравенству $\cos x > 0$.

$$\mathbb{Z} \ni u \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right)$$

57. («Физтех», 2009) Решить уравнение

$$\frac{\sin 4x}{4 \cos x + \cos 3x} = -4 \sin^3 x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$$

58. («Физтех», 2009) Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 3x + \frac{1}{\cos 3x} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right)$$

59. (МФТИ, 2008) Решить уравнение

$$\frac{64 \sin^3 x \cos^5 x + \sin 6x - 3 \sin 2x}{\sin x \cos x} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right)$$

60. (МФТИ, 2006) Решить уравнение

$$8 \cos^2 x \sin x + \cos x = \cos 3x + 6 \sin x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right)$$

61. (МФТИ, 2006) Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} 4x \operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 4x} = \frac{\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right)$$

62. (МФТИ, 1997) Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin 3x} = 2 \cos 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right)$$

63. (МФТИ, 2000) Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 7x}{\sin^2 x} = 16 \cos 4x(1 + 2 \cos 4x) + \frac{\cos^2 7x}{\cos^2 x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{7}{ux} + \frac{9}{x} \mp \frac{7}{ux} + \frac{8}{x}$$

64. (МФТИ, 2000) Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos 2x \cos 5x} + \frac{\sin 3x}{\cos 5x \cos 8x} = \sin 8x - \operatorname{tg} 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \varphi, 4k, n \neq 2 + 4k, u \neq 4k, k \in \mathbb{Z}$$

65. (МФТИ, 2001) Решить уравнение

$$\frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos x} + \cos^2 x \sin 3x = 6 \cos 2x \sin^2 x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u \neq \frac{9}{x} u(1 - \frac{7}{ux} + \frac{7}{x} u)$$

66. (МФТИ, 2002) Решить уравнение

$$\frac{3 + \cos 4x - 8 \sin^4 x}{4(\sin x + \cos x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u \neq$$

67. (МФТИ, 2005) Решить уравнение

$$\frac{\sin \frac{3x}{2} \sin \frac{5x}{2}}{\cos x \cos 4x} - \frac{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{7x}{2}}{\cos 4x \cos 3x} = \frac{2 \sin x \sin 2x}{\cos x \cos 3x} - \frac{1}{5 \cos x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u \neq \frac{4}{9} \operatorname{arccos} \frac{7}{1} \mp$$

68. (МФТИ, 2005) Решить уравнение

$$\frac{\sin^5 x - \cos^5 x}{\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\sin^5 x + \cos^5 x}{\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{7}{8} - \frac{3}{2} \cos 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u \neq \frac{8}{x} \mp$$

69. (МФТИ, 2007) Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi \sin^2 x + \pi}{4 \sin^6 x + 1} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4 \sin^6 x + 1} \right) = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{7}{ux} + \frac{7}{x}$$

70. (ОММО, 2020.6) Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$4 \sin(3x) + 13 \cos(3x) = 8 \sin(x) + 11 \cos(x).$$

$$\frac{11}{8} \sin(x) = \frac{8}{13} \cos(x) \Rightarrow \tan(x) = \frac{8}{13} \Rightarrow x \approx \frac{3}{8} \pi$$

71. (МГУ, мехмат, 2000-03.3) Найти все корни уравнения

$$\cos x \sin \frac{x}{4} + \frac{9}{10} \sin x + 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \cos \frac{x}{4} - \frac{9}{20} = 0,$$

принадлежащие отрезку $[-\frac{9}{2}\pi; -\frac{3}{2}\pi]$.

$$\left(\frac{9}{6}\right) \cos(x) = \frac{9}{11} - \frac{9}{61} - \frac{9}{23} = \dots$$

72. (МГУ, мехмат, 2009) Решить уравнение

$$\cos 4x + \sin\left(2x - \frac{a\pi}{64}\right) = \sin 3x,$$

где a — наименьшее из таких двузначных натуральных чисел, при приписывании которых справа к числу 20092009 полученное десятизначное число делится на 36.

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot 10^8 + \frac{9}{x} u(10^8) = \frac{9}{u \cdot x}$$

73. (МГУ, мехмат, 2008) Игорь решал тригонометрическое уравнение и получил ответ

$$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad \frac{4\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ в конце учебника выглядел иначе:

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Правильный ли ответ получил Игорь? Привести пример тригонометрического уравнения с ответом как в учебнике.

$$0 = \left(\frac{5}{6} + x \cos\right) (1 - x \sin) \dots$$

74. (Олимпиада СПбГУ, 2011) Решить уравнение

$$4 \cos x - \cos 3x + 3 = 3 \sin 3x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot 10^7 + \frac{5}{x} = \dots$$

75. («Ломоносов», 2006) Решите уравнение

$$\sin(x^2 + x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

$$\dots \cdot 2, 1, 0 = u \cdot 10^2 + \frac{5}{x} = \dots$$

76. («Ломоносов», 2015) Найдите все значения x , при которых числа $4 \operatorname{ctg}(\pi x)$, $\operatorname{tg} \frac{2\pi x}{3}$ и $6 \operatorname{tg} \frac{\pi x}{3}$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Из этих значений x выберите принадлежащие отрезку $[3; 9]$ и запишите в ответ их сумму.

87

77. («Ломоносов», 2016) Решите уравнение

$$5 \sin \left(2x + \arccos \frac{4}{5} \right) + 8\sqrt{5} \sin \left(x - \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) = 11.$$

В ответе укажите сумму всех решений, принадлежащих промежутку $\left(\frac{7\pi}{3}; \frac{7\pi}{2}\right)$, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

74,6

78. («Покори Воробьёвы горы!», 2008) Решите уравнение

$$\cos 6x - 3 \cos 5x + \cos 4x - 4 \cos x + 5 = 0.$$

$\mathbb{Z} \ni n, m \in \mathbb{Z}$

79. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Решите уравнение

$$\sin \left(x + 3^0 \cdot \frac{2\pi}{7} \right) + \sin \left(x + 3^1 \cdot \frac{2\pi}{7} \right) + \dots + \sin \left(x + 3^5 \cdot \frac{2\pi}{7} \right) = 1.$$

$\mathbb{Z} \ni n, m \in \mathbb{Z} - \frac{\pi}{2}$

80. («Покори Воробьёвы горы!», 2011) Найдите наименьшее натуральное решение уравнения

$$\sin(2011x)^\circ = \sin x^\circ.$$

12

81. («Покори Воробьёвы горы!», 2011) Решите уравнение

$$\sin(\sin x) = \sin(\cos x + 1).$$

$\mathbb{Z} \ni n, m \in \mathbb{Z} + \frac{\pi}{2}$

82. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Определите, сколько корней уравнения

$$4 \sin 2x + 3 \cos 2x - 2 \sin x - 4 \cos x + 1 = 0$$

расположено на отрезке $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2015}\pi]$. В ответ запишите сумму всех цифр найденного числа.

18135

83. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите уравнение

$$(1 - \cos x)(2 + \sin x + 4 \cos x) + 5(1 + \cos x)(2 - \sin x + 2 \cos x) = 0.$$

В ответ запишите сумму всех корней уравнения на промежутке $[1018\pi; 1019\pi]$, округлённую до сотых.

6342,03

84. (Всеросс., 2018, ШЭ, 11.5) Рассмотрим уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = -1$. Сколько у него решений на промежутке $[0, 6\pi]$?