

Системы тригонометрических уравнений

В данной статье мы рассматриваем тригонометрические системы двух уравнений с двумя неизвестными. Методы решения таких систем и различные специальные приёмы мы будем изучать сразу на конкретных примерах.

Может случиться, что одно из уравнений системы содержит тригонометрические функции от неизвестных x и y , а другое уравнение является линейным относительно x и y . В таком случае действуем очевидным образом: одну из неизвестных выражаем из линейного уравнения и подставляем в другое уравнение системы.

ЗАДАЧА 1. Решить систему:

$$\begin{cases} x + y = \pi, \\ \sin x + \sin y = 1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Из первого уравнения выражаем y через x :

$$y = \pi - x,$$

и подставляем во второе уравнение:

$$\sin x + \sin(\pi - x) = 1 \Leftrightarrow 2 \sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}.$$

Получилось простейшее тригонометрическое уравнение относительно x . Его решения запишем в виде двух серий:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Остаётся найти соответствующие значения y :

$$y_1 = \pi - x_1 = \frac{5\pi}{6} - 2\pi n, \quad y_2 = \pi - x_2 = \frac{\pi}{6} - 2\pi n.$$

Как всегда в случае системы уравнений, ответ даётся в виде перечисления пар $(x; y)$.

ОТВЕТ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} - 2\pi n\right), \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} - 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Обратите внимание, что x и y связаны друг с другом посредством целочисленного параметра n . А именно, если в выражении для x стоит $+2\pi n$, то в выражении для y автоматически появляется $-2\pi n$, причём с тем же самым n . Это — следствие «жёсткой» зависимости между x и y , задаваемой уравнением $x + y = \pi$.

ЗАДАЧА 2. Решить систему:

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}, \\ x - y = \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Здесь имеет смысл сначала преобразовать первое уравнение системы:

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 2y}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 2y = -1 \Leftrightarrow 2 \cos(x + y) \cos(x - y) = -1.$$

Таким образом, наша система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} 2 \cos(x + y) \cos(x - y) = -1, \\ x - y = \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

Подставляем $x - y = \frac{2\pi}{3}$ в первое уравнение:

$$2 \cos(x + y) \cos \frac{2\pi}{3} = -1 \Leftrightarrow \cos(x + y) = 1 \Leftrightarrow x + y = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

В результате приходим к системе:

$$\begin{cases} x + y = 2\pi n, \\ x - y = \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

Складываем эти уравнения, делим на 2 и находим x ; вычитаем из первого уравнения второе, делим на 2 и находим y :

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad y = -\frac{\pi}{3} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ОТВЕТ: $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; -\frac{\pi}{3} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

В ряде случаев тригонометрическую систему удаётся свести к системе алгебраических уравнений подходящей заменой переменных.

ЗАДАЧА 3. Решить систему:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Замена $u = \sin x$, $v = \cos y$ приводит к алгебраической системе относительно u и v :

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^2 - v^2 = 1. \end{cases}$$

Эту систему вы без труда решите самостоятельно. Решение единственно: $u = 1$, $v = 0$. Обратная замена приводит к двум простейшим тригонометрическим уравнениям:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos y = 0, \end{cases}$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad y = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (k, n \in \mathbb{Z}).$$

ОТВЕТ: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), k, n \in \mathbb{Z}$.

Теперь в записи ответа фигурируют **два** целочисленных параметра k и n . Отличие от предыдущих задач состоит в том, что в данной системе отсутствует «жёсткая» связь между x и y (например, в виде линейного уравнения), поэтому x и y в гораздо большей степени независимы друг от друга.

В данном случае было бы ошибкой использовать лишь один целочисленный параметр n , записав ответ в виде $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$. Это привело бы к потере бесконечного множества решений системы. Например, потерялось бы решение $\left(\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, возникающее при $k = 1$ и $n = 0$.

ЗАДАЧА 4. Решить систему:

$$\begin{cases} \sin x + 2 \sin y = 1, \\ \cos 2x + 2 \cos 2y = 2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Преобразуем сначала второе уравнение:

$$1 - 2 \sin^2 x + 2(1 - 2 \sin^2 y) = 2 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 4 \sin^2 y = 1.$$

Теперь делаем замену: $u = \sin x$, $v = \sin y$. Получим систему:

$$\begin{cases} u + 2v = 1, \\ 2u^2 + 4v^2 = 1. \end{cases}$$

Решениями этой системы служат две пары: $u_1 = 0$, $v_1 = 1/2$ и $u_2 = 2/3$, $v_2 = 1/6$. Остаётся сделать обратную замену:

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x = \frac{2}{3}, \\ \sin y = \frac{1}{6}, \end{cases}$$

и записать ответ.

ОТВЕТ: $\left(\pi k; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $\left((-1)^k \arcsin \frac{2}{3} + \pi k; (-1)^n \arcsin \frac{1}{6} + \pi n\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

ЗАДАЧА 5. Решить систему:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Здесь для получения алгебраической системы нужно поработать ещё больше. Первое уравнение нашей системы запишем в виде:

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1.$$

Во втором уравнении имеем:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= 2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y) = \\ &= 2 \cos^2 \frac{x-y}{2} - 1 - \left(2 \cos^2 \frac{x+y}{2} - 1\right) = 2 \cos^2 \frac{x-y}{2} - 2 \cos^2 \frac{x+y}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}, \\ \cos^2 \frac{x-y}{2} - \cos^2 \frac{x+y}{2} = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Делаем замену

$$u = \cos \frac{x-y}{2}, \quad v = \cos \frac{x+y}{2}$$

и получаем алгебраическую систему:

$$\begin{cases} uv = \frac{1}{2}, \\ u^2 - v^2 = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Решениями этой системы служат две пары: $u_1 = 1, v_1 = 1/2$ и $u_2 = -1, v_2 = -1/2$.
Первая пара даёт систему:

$$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 1, \\ \cos \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 2\pi k, \\ \frac{x+y}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad (k, n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Отсюда

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi(n+k), \quad y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi(n-k).$$

Вторая пара даёт систему:

$$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = -1, \\ \cos \frac{x+y}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = \pi + 2\pi k, \\ \frac{x+y}{2} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad (k, n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Отсюда

$$x = \pi \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi(n+k), \quad y = -\pi \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi(n-k).$$

ОТВЕТ: $\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi(n+k); \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi(n-k)\right), \left(\pi \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi(n+k); -\pi \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi(n-k)\right), k, n \in \mathbb{Z}$.

Однако свести систему тригонометрических уравнений к системе алгебраических уравнений удаётся далеко не всегда. В ряде случаев требуется применять различные специальные приёмы.

Иногда удаётся упростить систему путём сложения или вычитания уравнений.

ЗАДАЧА 6. Решить систему:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Складывая и вычитая эти уравнения, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

А эта система, в свою очередь, равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x-y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x-y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \quad (k, n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi(k+n), \\ y = \frac{\pi}{6} + \pi(k-n) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + \pi(k+n), \\ y = -\frac{\pi}{6} + \pi(k-n). \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left(\frac{\pi}{3} + \pi(k+n); \frac{\pi}{6} + \pi(k-n)\right), \left(\frac{2\pi}{3} + \pi(k+n); -\frac{\pi}{6} + \pi(k-n)\right), k, n \in \mathbb{Z}$.

Иногда можно прийти к решению, умножая уравнения друг на друга.

ЗАДАЧА 7. Решить систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{2} \sin y, \\ \operatorname{ctg} x = \sqrt{2} \cos y. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Напомним, что умножить уравнения системы друг на друга — это значит записать уравнение вида «произведение левых частей равно произведению правых частей». Полученное уравнение будет следствием исходной системы (то есть все решения исходной системы удовлетворяют и полученному уравнению).

В данном случае умножение уравнений системы приводит к уравнению:

$$1 = 2 \sin y \cos y = \sin 2y,$$

откуда $y = \pi/4 + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Подставлять y в таком виде в систему неудобно — лучше разбить на две серии:

$$y_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad y_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n.$$

Подставляем y_1 в первое уравнение системы:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \sin y_1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Легко видеть, что подстановка y_1 во второе уравнение системы приведёт к тому же самому результату.

Теперь подставляем y_2 :

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \sin y_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

ОТВЕТ: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right), k, n \in \mathbb{Z}$.

Иногда к результату приводит деление уравнений друг на друга.

ЗАДАЧА 8. Решить систему:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \sin x + \sin y = \sqrt{3}. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Преобразуем:

$$\begin{cases} 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1, \\ 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Введём временно обозначения: $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$. Тогда полученная система переписывается в виде:

$$\begin{cases} 2 \cos \alpha \cos \beta = 1, \\ 2 \sin \alpha \cos \beta = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Ясно, что $\cos \beta \neq 0$. Тогда, поделив второе уравнение на первое, придём к уравнению

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3},$$

которое является следствием системы. Имеем:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

и снова (в целях дальнейшей подстановки в систему) нам удобно разбить полученное множество на две серии:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad \alpha_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n.$$

Подстановка α_1 в любое из уравнений системы приводит к уравнению:

$$\cos \beta = 1 \Leftrightarrow \beta_1 = 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Аналогично, подстановка α_2 в любое из уравнений системы даёт уравнение:

$$\cos \beta = -1 \Leftrightarrow \beta_2 = \pi + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Итак, имеем:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \beta_1 = 2\pi k \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \\ \beta_2 = \pi + 2\pi k, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \frac{x-y}{2} = 2\pi k \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \\ \frac{x-y}{2} = \pi + 2\pi k, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi(n+k), \\ y = \frac{\pi}{3} + 2\pi(n-k) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \frac{7\pi}{3} + 2\pi(n+k), \\ y = \frac{\pi}{3} + 2\pi(n-k). \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi(n+k); \frac{\pi}{3} + 2\pi(n-k)\right)$, $\left(\frac{7\pi}{3} + 2\pi(n+k); \frac{\pi}{3} + 2\pi(n-k)\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

В некоторых случаях на помощь приходит основное тригонометрическое тождество.

ЗАДАЧА 9. Решить систему:

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin x = 1 - \sin y, \\ \sqrt{2} \cos x = \cos y. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Возведём обе части каждого уравнения в квадрат:

$$\begin{cases} 2 \sin^2 x = (1 - \sin y)^2, \\ 2 \cos^2 x = \cos^2 y. \end{cases}$$

Сложим полученные уравнения:

$$2 = (1 - \sin y)^2 + \cos^2 y = 1 - 2 \sin y + \sin^2 y + \cos^2 y = 2 - 2 \sin y,$$

откуда $\sin y = 0$ и $y = \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Это — следствие исходной системы; то есть, для всякой пары $(x; y)$, являющейся решением системы, второе число этой пары будет иметь вид πn с некоторым целым n .

Разбиваем y на две серии:

$$y_1 = 2\pi n, \quad y_2 = \pi + 2\pi n.$$

Подставляем y_1 в исходную систему:

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin x = 1 - \sin y_1 = 1, \\ \sqrt{2} \cos x = \cos y_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Решением данной системы служит серия

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(Обратите внимание, что теперь недостаточно было бы подставить y_1 в какое-то одно из уравнений системы. Подстановка y_1 в первое и второе уравнение системы приводит к системе двух разных уравнений относительно x .)

Аналогично, подставляем y_2 в исходную систему:

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin x = 1 - \sin y_2 = 1, \\ \sqrt{2} \cos x = \cos y_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Отсюда

$$x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

ОТВЕТ: $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; 2\pi n\right), \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \pi + 2\pi n\right), k, n \in \mathbb{Z}$.

Иногда в ходе преобразований удаётся получить простое соотношение между неизвестными и выразить из этого соотношения одно неизвестное через другое.

ЗАДАЧА 10. Решить систему:

$$\begin{cases} 5 \cos x - \cos y = 3, \\ 2 \sin x \sin(y - x) + \cos y = 1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Во втором уравнении системы преобразуем удвоенное произведение синусов в разность косинусов:

$$\cos(2x - y) - \cos y + \cos y = 1 \Leftrightarrow \cos(2x - y) = 1 \Leftrightarrow 2x - y = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Выражаем отсюда y через x :

$$y = 2x + 2\pi n,$$

и подставляем в первое уравнение системы:

$$5 \cos x - \cos 2x = 3 \Leftrightarrow 5 \cos x - (2 \cos^2 x - 1) = 3 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0.$$

Дальнейшее тривиально. Получаем: $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Остаётся найти y из полученного выше соотношения:

$$y = \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi k + 2\pi n.$$

ОТВЕТ: $\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi k + 2\pi n \right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Разумеется, рассмотренные задачи не охватывают всего многообразия систем тригонометрических уравнений. В любой сколько-нибудь непростой ситуации требуется проявлять изобретательность, которая вырабатывается только практикой решения разнообразных задач.

Задачи

Во всех ответах предполагается, что $k, n \in \mathbb{Z}$.

1. Решите систему:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = \pi, \\ \cos x - \cos y = 1. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = 1. \end{cases}$$

$$\left(u \pm \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \left(\cos \left(u \pm \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left(u \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(\cos \left(u \pm \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left(u \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(\cos \left(u \pm \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left(u \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right) \left(\cos \left(u \pm \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left(u \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

2. Решите систему:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2 \sin y. \end{cases}$$

$$\left(u \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\operatorname{tg} \left(u \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{tg} \left(u \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{6} \right) \left(\sin \left(u \pm \frac{5\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \right) - 2 \sin \left(u \pm \frac{5\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} \right) \right) \left(\sin \left(u \pm \frac{5\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \right) - 2 \sin \left(u \pm \frac{5\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} \right) \right) \left(\sin \left(u \pm \frac{5\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \right) - 2 \sin \left(u \pm \frac{5\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} \right) \right)$$

3. Решите систему:

$$\text{а) } \begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2}, \\ x - y = \frac{4\pi}{3}. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x \sin y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$\left(u \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) \left(\sin^2 \left(u \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) + \sin^2 \left(u \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \right) \left(\sin \left(u \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(u \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{4} \right) \left(\sin \left(u \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(u \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{4} \right) \left(\sin \left(u \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(u \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{4} \right)$$

4. Решите систему:

$$\text{а) } \begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{2} \sin x + \cos y = 1, \\ 2 \sin x - 3 \cos y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\left((u\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}; y\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}(1-)) \text{ (} \vartheta \text{ : (} (u\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}; y\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}(1+y)(1-)) \text{) : (} (u\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}; y\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}(1-)) \text{) (} \vartheta \text{) } \right)$$

5. Решите систему:

$$\text{а) } \begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{1}{2}, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = \frac{3}{4}. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = 2, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = -\frac{9}{5}. \end{cases}$$

$$\left((u\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}; y\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}(1-)) \text{ (} \vartheta \text{ : (} (u\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}; y\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}(1+y)(1-)) \text{) : (} (u\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}; y\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}(1-)) \text{) (} \vartheta \text{) } \right)$$

6. Решите систему:

$$\text{а) } \begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \cos 2x - \cos 2y = 1. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sin x + \cos x = 2 + \sin y + \cos y, \\ 2 \sin 2x + \sin 2y = 0. \end{cases}$$

$$\left((u\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}; y\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}(1-)) \text{ (} \vartheta \text{ : (} (u\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}; y\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}(1-)) \text{) (} \vartheta \text{) } \right)$$

7. Решите систему:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\left(((1 - u\sqrt{z} - y)\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}(1+y)(1-)) \text{ : (} (1 + u\sqrt{z} + y)\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}(1+y)(1-)) \text{) : ((} (u\sqrt{z} - y)\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}(1-)) \text{ : (} (u\sqrt{z} + y)\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}(1-)) \text{) (} \vartheta \text{) } \right)$$

8. Решите систему:

$$\text{а) } \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

$$\left(((u - y)\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}; (u + y)\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}) \text{ (} \vartheta \text{ : ((} (u - y)\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}; (u + y)\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}) \text{) (} \vartheta \text{) } \right)$$

9. Решите систему:

$$\text{а) } \begin{cases} 4 \sin x \cos y = 1, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \sin y. \end{cases}$$

$$\left((u\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}; y\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}) \text{ (} \vartheta \text{ : ((} (\frac{z}{\sqrt{z}} + u)\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}(1-)) \text{ : ((} (\frac{z}{\sqrt{z}} - u)\sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{z}}(1+y)(1-)) + \frac{z}{\sqrt{z}}) \text{) (} \vartheta \text{) } \right)$$

10. Решите систему:

$$\begin{cases} \cos 2x = \operatorname{tg} \left(y + \frac{\pi}{4} \right), \\ \cos 2y = \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right). \end{cases}$$

$$\left(u\pi + \frac{\pi}{2}; \pi u + \frac{\pi}{2} \right); \left(u\pi + \frac{\pi}{2}; \pi u + \frac{\pi}{2} - \right); \left(u\pi; \pi u \right)$$

11. Решите систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = 2\sqrt{2} \cos^3 y, \\ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 2\sqrt{2} \sin^3 y. \end{cases}$$

$$\left(u\pi + \frac{\pi}{2}; \pi u + \frac{\pi}{2} \right); \left(u\pi + \frac{\pi}{2}; \pi u \right)$$

12. Решите систему:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\left((y - u)\pi + \frac{9}{2}; (y + u)\pi + \frac{9}{2} \right); \left((y - u)\pi + \frac{9}{2}; (y + u)\pi + \frac{9}{2} \right)$$

13. Решите систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\left((y - u)\pi + \frac{\pi}{2}; (y + u)\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

14. Решите систему:

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \sin y, \\ \sqrt{2} \cos x = \sqrt{3} \cos y. \end{cases}$$

$$\left(u\pi + \frac{\pi}{3}; \pi u + \frac{9}{2} \right); \left(u\pi + \frac{\pi}{3}; \pi u + \frac{9}{2} \right); \left(u\pi + \frac{\pi}{3}; \pi u + \frac{9}{2} \right); \left(u\pi + \frac{\pi}{3}; \pi u + \frac{9}{2} \right)$$

15. Решите систему:

$$\begin{cases} 6 \cos x + 4 \cos y = 5, \\ 3 \sin x + 2 \sin y = 0. \end{cases}$$

$$\left(u\pi + \frac{8}{3} \arccos \frac{5}{6}; \pi u + \frac{8}{3} \arccos \frac{5}{6} - \right); \left(u\pi + \frac{8}{3} \arccos \frac{5}{6}; \pi u + \frac{8}{3} \arccos \frac{5}{6} - \right)$$

16. Решите систему:

a)
$$\begin{cases} 4 \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{tg} 2y, \\ 2 \sin x \cos(x - y) = \sin y. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \sin 2y = \sin 2x, \\ 2 \sin x \sin(x + y) = \cos y. \end{cases}$$

$$\left(u\pi + \frac{\pi}{2}; \pi u + \frac{\pi}{2} \right); \left(u\pi; \pi u + \frac{\pi}{2} \right); \left(u\pi; \pi u \right)$$

17. (МГУ, экз. для иностр. гр-н, 2012) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4 + \cos 2x = 7 \sin y, \\ y^2 - x^2 = \pi y - \frac{\pi^2}{4}. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \left(u\sqrt{2} - \frac{9}{\sqrt{2}}; u\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} \right), \left(u\sqrt{2} - \frac{9}{\sqrt{2}}; u\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} \right), \left(u\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}}; u\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} \right), \left(u\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}}; u\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} \right)$$

18. (МГУ, ВМК, 2005) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin 2(x + y) = 1, \\ xy = 9. \end{cases}$$

$$\Gamma \setminus \Gamma - \Gamma \neq u, \mathbb{Z} \ni u, \sqrt{99 - \frac{9}{2} \left(u\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} \right)} \wedge \frac{9}{\sqrt{2}} \mp \frac{9}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}} = u x \text{ и } \Gamma, \left(u x - u\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}}, u x \right)$$

19. (МГУ, географич. ф-т, 2005) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 12 \sin^2 x - \sin^2 y = 3, \\ 6 \sin x + \cos y = -2. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u, y, \left(y\sqrt{2}, u\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} \right)_{\Gamma+u(\Gamma)}$$

20. (МГУ, ф-т гос. управления, 2005) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \sin 1 = 0, \\ \cos x - \cos 1 = 0. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u, n, u\sqrt{2} + \Gamma$$

21. (МФТИ, 1992) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 10 \cos 2x - 2 = 7 \cos x \cos 2y, \\ \sin x = \sqrt{\cos x} \sin y. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u, y, \left(y\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} \wedge \arcsin_{\Gamma+u(\Gamma)}, u\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} \operatorname{arccos} - \right); \left(y\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} \wedge \arcsin_{\Gamma+u(\Gamma)}, u\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} \operatorname{arccos} \right)$$

22. (МФТИ, 1992) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2} \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{ctg} x = 3 \operatorname{tg} y, \\ \sqrt{2} \sin 2x = \frac{4}{3} \sin x \cos y. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u, n, y, \left(y\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} \wedge \arcsin_{\Gamma+u(\Gamma)}, u\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} \operatorname{arccos} \right); \left(y\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} \wedge \arcsin_{\Gamma+u(\Gamma)}, u\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{2}} \operatorname{arccos} \right)$$

23. (МФТИ, 1996) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |\sin 3x| = -\sqrt{2} \sin y, \\ \cos 2y + 2 \cos 2x \sin^2 2x = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u, y : (y\pi + \frac{\pi}{2} + \pi) \cup (\pi - y\pi + \frac{\pi}{2})$$

24. (МФТИ, 1996) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left| \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \sin y - \cos y, \\ \sin 2y + 2 \sin 2x = \frac{3}{4} + 2 \sin^3 2x. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u, y : (y\pi + \frac{\pi}{2} + \pi) \cup (\pi - y\pi + \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi) \cup (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$$

25. (МФТИ, 1997) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 9 \cos x \cos y - 5 \sin x \sin y = -6, \\ 7 \cos x \cos y - 3 \sin x \sin y = -4. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u, y : (y\pi + \pi) \cup (\pi - y\pi) \cup (y\pi + \pi) \cup (\pi - y\pi)$$

26. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) Решите систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \frac{y}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

$$y\pi + \frac{\pi}{2} = \pi - y\pi + \frac{\pi}{2} \cup y\pi + \frac{\pi}{2} = \pi - y\pi + \frac{\pi}{2}$$

27. («Физтех», 2015) Даны два числа $x < y$. Оказалось, что

$$\sin(\pi x) + \sin(\pi y) = \frac{4\sqrt{2}}{5}, \quad \cos(\pi x) + \cos(\pi y) = \frac{3\sqrt{2}}{5}.$$

Какое наименьшее значение может принимать величина $y - x$?

□0

28. («Физтех», 2015) Даны два числа $x < y$. Оказалось, что

$$\sin(\pi x) + \cos(\pi y) = \frac{3\sqrt{2}}{5}, \quad \cos(\pi x) - \sin(\pi y) = \frac{4\sqrt{2}}{5}.$$

Какое наименьшее значение может принимать величина $y - x$?

□1

29. («Физтех», 2018, 11) Числа x и y таковы, что выполняются равенства

$$\sin y + \cos x = \sin 3x \quad \text{и} \quad \sin 2y - \sin 2x = \cos 4x - \cos 2x.$$

Какое *наименьшее* значение может принимать сумма $\cos y + \sin x$?

$$\frac{2}{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}} - 1 -$$

30. («Физтех», 2019, 11) Известно, что

$$\frac{\cos x - \sin x}{\sin y} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \frac{x+y}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\sin x + \cos x}{\cos y} = -6\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}.$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

$$\frac{22}{21} - \text{или} \frac{22}{21} \text{ и } 1 -$$

31. («Физтех», 2019, 11) Известно, что

$$\frac{\cos 3x}{(2 \cos 2x - 1) \cos y} = \frac{2}{5} + \cos^2(x+y) \quad \text{и} \quad \frac{\sin 3x}{(2 \cos 2x + 1) \sin y} = \frac{3}{5} + \sin^2(x+y).$$

Найдите все возможные значения выражения $\cos(x+3y)$, если известно, что их не менее двух.

$$\frac{2}{3} \text{ или } 1 -$$

32. (Всеросс., 2019, МЭ, 11.3) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \sin z, \\ \cos x \sin y = \cos z, \end{cases}$$

если числа x , y и z лежат на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$.

$$(0; \frac{\pi}{2}) \text{ и } (0; \frac{\pi}{2})$$