Суммы и произведения тригонометрических функций

Ещё одним полезным следствием формул сложения (наряду с формулами двойного угла) служат формулы преобразования сумм тригонометрических функций в произведения и обратно — произведений в суммы.

Начнём с формул синуса суммы и разности:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta; \qquad (1)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Сложим формулы (1) и (2):

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta. \qquad (3)$$

Отсюда:

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right).}$$

Мы получили формулу преобразования произведения синуса на косинус в сумму синусов (эта сумма в реальности может оказаться разностью). Примеры:

$$\sin\frac{7\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11} = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{11}+\frac{3\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{11}-\frac{3\pi}{11}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{10\pi}{11} + \sin\frac{4\pi}{11}\right);$$

$$\sin 2x\cos 5x = \frac{1}{2}(\sin(2x+5x) + \sin(2x-5x)) = \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin(-3x)) = \frac{1}{2}(\sin 7x - \sin 3x).$$

Промежуточное равенство (3) приводит нас к ещё двум важным формулам. Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} x = \alpha+\beta, \\ y = \alpha-\beta. \end{cases} \qquad (4)$$

Складывая и вычитая эти равенства, выразим из них α и β:

$$x + y = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{x+y}{2};$$

$$x - y = 2\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{x-y}{2}.$$

Подставляя всё это в (3), получим:

$$\boxed{\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.} \qquad (5)$$

Это формула преобразования суммы синусов в произведение. Запоминаем словесную формулировку: *сумма синусов есть два синус полусуммы на косинус полуразности.*

Делая в (5) замену y на $-y$, придём к формуле преобразования разности синусов в произведение:

$$\boxed{\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.}$$

Словами: *разность синусов есть два синус полуразности на косинус полусуммы.*

Теперь проделаем те же самые операции, но начнём с формул косинуса суммы и разности:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \tag{6}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \tag{7}$$

Сложим формулы (6) и (7):

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta. \tag{8}$$

Отсюда:

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)).}$$

Это формула преобразования произведения косинусов в сумму косинусов.

С помощью замены (4) приходим к формуле преобразования суммы косинусов в произведение косинусов:

$$\boxed{\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\,.}$$

Словами: *сумма косинусов есть два косинус полусуммы на косинус полуразности.*

Теперь вычтем из равенства (7) равенство (6):

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta. \tag{9}$$

Отсюда:

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).}$$

Это формула преобразования произведения синусов в разность косинусов.

Делаем в равенстве (9) замену (4) и приходим к формуле преобразования разности косинусов в произведение синусов:

$$\cos y - \cos x = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\,.$$

В целях единообразия записи поменяем местами x и y в последней формуле:

$$\boxed{\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}\,.}$$

Словами: *разность косинусов есть два синус полусуммы на синус* ***обратной*** *полуразности.*

Задачи

1. Преобразуйте в произведение:

а) $\sin 48^\circ + \sin 32^\circ$;

б) $\sin 71^\circ - \sin 13^\circ$;

в) $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}$;

г) $\cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{9\pi}{7}$.

а) $2\sin 40^\circ \cos 8^\circ$; б) $2\sin 29^\circ \cos 42^\circ$; в) $2\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}$; г) $2\sin\frac{6\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}$

2. Упростите выражение:

а) $\sin 83^\circ - \sin 23^\circ$;

б) $\cos 35^\circ + \cos 25^\circ$;

в) $\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}$;

г) $\cos\frac{4\pi}{15} - \cos\frac{2\pi}{5}$.

а) $\cos 53^\circ$; б) $\sqrt{3}\cos 5^\circ$; в) $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$; г) $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{15}$

3. Преобразуйте в произведение:

а) $\sin 3\alpha - \sin 7\alpha$; б) $\cos 4\alpha + \cos 10\alpha$;

в) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) - \cos\alpha$; г) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) + \sin\alpha$.

а) $-2\sin 2\alpha\cos 5\alpha$; б) $2\cos 7\alpha\cos 3\alpha$; в) $-\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

4. Преобразуйте в произведение:

а) $\sin 10^\circ + \cos 70^\circ$; б) $\cos 50^\circ - \sin 14^\circ$;

в) $\cos 40^\circ + \sin 40^\circ$; г) $\sin 20^\circ - \cos 20^\circ$.

а) $2\sin 15^\circ\cos 5^\circ$; б) $2\sin 13^\circ\cos 27^\circ$; в) $\sqrt{2}\cos 5^\circ$; г) $-\sqrt{2}\sin 25^\circ$

5. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$; б) $\dfrac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha\operatorname{tg}\alpha$;

в) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{\sin\alpha - \sin 2\alpha} = -\operatorname{tg}\dfrac{3\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$; г) $\dfrac{\cos 3\alpha - \cos 7\alpha}{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha} = \operatorname{tg} 5\alpha$.

6. Докажите тождество:

а) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha = 4\sin\dfrac{5\alpha}{2}\cos\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}$;

б) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha = 4\cos\dfrac{5\alpha}{2}\cos\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}$;

в) $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha - \cos 6\alpha + \cos 8\alpha = -4\cos 5\alpha\sin 2\alpha\sin\alpha$.

7. Докажите тождество:

а) $\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + \sin 5\alpha = 4\sin 3\alpha\cos^2\alpha$; б) $\sin^2 5\alpha - \sin^2 3\alpha = \sin 8\alpha\sin 2\alpha$.

8. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; б) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$;

в) $\dfrac{\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$; г) $\dfrac{\sin 4\alpha + 2\cos 3\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 2\alpha} = -\operatorname{ctg} 3\alpha$;

д) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$; е) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha$.

9. Докажите равенство:

а) $\sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ = \sin 1^\circ$;
б) $\cos 115^\circ - \cos 35^\circ + \cos 65^\circ + \cos 25^\circ = \sin 5^\circ$.

10. Докажите тождество:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha = -\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha.$$

11. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$;
б) $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} 2\alpha + 4 \operatorname{ctg} 4\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$;
в) $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} 2\alpha + 4 \operatorname{tg} 4\alpha + 8 \operatorname{ctg} 8\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$;
г) $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} 2\alpha + 4 \operatorname{tg} 4\alpha + 8 \operatorname{tg} 8\alpha + 16 \operatorname{ctg} 16\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$.

12. Докажите тождество:

$$\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} = 2\cos \alpha.$$

13. Преобразуйте в сумму или разность:

а) $2 \sin 10^\circ \cos 5^\circ$;
б) $2 \sin 25^\circ \cos 55^\circ$;
в) $2 \cos \dfrac{\pi}{5} \cos \dfrac{2\pi}{5}$;
г) $2 \sin \dfrac{7\pi}{18} \sin \dfrac{2\pi}{9}$.

а) $\sin 15^\circ + \sin 5^\circ$; б) $\sin 80^\circ - \frac{1}{2}$; в) $\cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{5}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \frac{11\pi}{18}$

14. Преобразуйте в сумму или разность:

а) $\sin 2\alpha \cos 5\alpha$;
б) $\cos \beta \cos 3\beta$;
в) $\sin 6\gamma \cos \gamma$;
г) $\sin 3\varphi \sin 11\varphi$.

а) $\frac{1}{2}(\sin 7\alpha - \sin 3\alpha)$; б) $\frac{1}{2}(\cos 4\beta + \cos 2\beta)$; в) $\frac{1}{2}(\sin 7\gamma + \sin 5\gamma)$; г) $\frac{1}{2}(\cos 8\varphi - \cos 14\varphi)$

15. Проверьте равенство:

а) $\sin 2x \cos 3x + \sin 4x \cos 9x = \sin 6x \cos 7x$;
б) $\sin 3x \sin x + \sin 4x \sin 8x = \sin 7x \sin 5x$;
в) $\cos 3x \cos 6x - \cos 4x \cos 7x = \sin 10x \sin x$;
г) $\sin 4x \cos x - \sin 5x \cos 2x = -\sin x \cos 6x$.