Тригонометрические неравенства

Предполагается, что читатель умеет решать простейшие тригонометрические неравенства. Мы же переходим к более сложным задачам.

Задача. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\cos x + \frac{1}{2}} > 2\cos x$$

на отрезке $\left[-2; \frac{16}{15}\right]$.

Решение. Сделаем замену $t = \cos x$:

$$\sqrt{t + \frac{1}{2}} > 2t \qquad (1)$$

и решим полученное неравенство относительно t.

При $t < 0$ неравенство (1) равносильно неравенству $t + \frac{1}{2} \geqslant 0$. Отсюда имеем первую часть решений: $-\frac{1}{2} \leqslant t < 0$.

При $t \geqslant 0$ неравенство (1) равносильно неравенству

$$t + \frac{1}{2} > 4t^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4t^2 - t - \frac{1}{2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}\,,$$

откуда получаем вторую часть решений: $0 \leqslant t < \frac{1}{2}$.

Объединяя обе части, находим множество решений неравенства (1): $-\frac{1}{2} \leqslant t < \frac{1}{2}$. Обратная замена приводит к неравенству

$$-\frac{1}{2} \leqslant \cos x < \frac{1}{2}\,,$$

множество M решений которого является объединением всевозможных промежутков

$$A_n = \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \quad \text{и} \quad B_n = \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$$

при всех целых n:

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n \cup B_n.$$

Нам остаётся найти пересечение множества M с отрезком $I = \left[-2; \frac{16}{15}\right]$.

Легко понять, что при $n \neq 0$ отрезок I не пересекает ни один из промежутков A_n, B_n (убедитесь в этом самостоятельно). Далее, поскольку $-\frac{2\pi}{3} < -2 < -\frac{\pi}{3}$, то $I \cap A_0 = \left[-2; -\frac{\pi}{3}\right)$. Наконец, так как

$$\frac{16}{15} - \frac{\pi}{3} = \frac{16 - 5\pi}{15} > \frac{16 - 5\cdot 3{,}2}{15} = 0,$$

то $I \cap B_0 = \left(\frac{\pi}{3}; \frac{16}{15}\right]$.

Ответ: $\left[-2; -\dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{16}{15}\right]$.

Задача. (*МГУ, ВМК, 2006*) Найдите все решения неравенства

$$\operatorname{ctg} x > \frac{5\cos 2x + 7}{5\sin 2x - 4}\,,$$

удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{12} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Заметим, что при $x \neq \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$ имеют место тождества:

$$\cos 2x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{\operatorname{ctg}^2 x + 1}, \quad \sin 2x = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{2\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg}^2 x + 1}.$$

Делая в исходном неравенстве замену $t = \operatorname{ctg} x$, приходим к рациональному неравенству относительно t:

$$t > \frac{5 \cdot \frac{t^2-1}{t^2+1} + 7}{5 \cdot \frac{2t}{t^2+1} - 4},$$

что после несложных преобразований даёт равносильное неравенство

$$\frac{(2t+1)(t^2+1)}{(t-2)(2t-1)} > 0,$$

легко решаемое методом интервалов:

$$-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}, \quad t > 2.$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} < \operatorname{ctg} x < \dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{ctg} x > 2. \end{array}\right.$$

Множество M решений данной совокупности:

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n \cup B_n,$$

где

$$A_n = (\pi n; \operatorname{arcctg} 2 + \pi n), \quad B_n = \left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{2} + \pi n; \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n\right).$$

Нам требуется найти пересечение множества M с промежутком $I = \left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{2}\right)$. Очевидно, что при $n \neq 0$ множества A_n и B_n не пересекаются с I, а

$$B_0 \cap I = \left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Кроме того,

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} = \frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12}} = \frac{2\cos^2 \frac{\pi}{12}}{2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2 + \sqrt{3} > 2,$$

поэтому $\frac{\pi}{12} < \operatorname{arcctg} 2$ и

$$A_0 \cap I = \left[\frac{\pi}{12}; \operatorname{arcctg} 2\right). \tag{3}$$

Остаётся объединить промежутки (2) и (3).

Ответ: $\left[\frac{\pi}{12}; \operatorname{arcctg} 2\right) \cup \left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Задачи

1. (*МГУ, ДВИ, 2015.3*) Решите неравенство

$$\cos x + \sqrt{2}\cos 2x - \sin x \geqslant 0.$$

$\boxed{x \in \left[-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12} + 2\pi n, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right],\ n \in \mathbb{Z}}$

2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019*) Решите неравенство

$$\sqrt{2}\cos 2x \geqslant \sin x - \cos x.$$

$\boxed{\left[-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right]}$

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017*) Решите неравенство

$$3\sin\left(\frac{2x}{3}\right) \geqslant 5 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right).$$

$\boxed{\frac{3\pi}{4} + 6\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017*) Решите неравенство

$$\left(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}\right)^7 > 1.$$

$\boxed{\left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}}$

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\sin x + \frac{1}{2}} > 2\sin x$$

на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{8}{3}\right]$.

$\boxed{\left[-\frac{1}{2}; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{8}{3}\right]}$

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\cos x + \frac{1}{2}} > 2\cos x$$

на отрезке $\left[-2; \frac{16}{15}\right]$.

$\boxed{\left[-2; -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}; \frac{16}{15}\right]}$

7. (*«Ломоносов», 2016*) Решите неравенство

$$\sqrt{7+8\sin^2\frac{\pi x}{18}} > 4\cos^2\frac{\pi x}{18}\,.$$

В ответ впишите сумму всех целых решений, принадлежащих отрезку $[-18; 35]$.

$\boxed{297}$

8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016*) Решите неравенство

$$\sqrt{2\sin x\cos x} > \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x\cos x(\sin x - \cos x).$$

$\boxed{\left(\frac{\pi}{12}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right] \cup \left[\pi+2\pi n; \frac{17\pi}{12}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}}$

9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016*) Найдите сумму всех принадлежащих отрезку $[-75; 5]$ целых решений неравенства

$$\frac{\sin\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{\pi x}{2}+1}{\sin\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}-1} \geqslant \sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right)-\frac{x}{10}\,.$$

$\boxed{-12}$

10. (*«Ломоносов», 2014*) Найдите количество всех целочисленных решений неравенства

$$\sqrt{3\cos\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{\pi x}{4}+1}-\sqrt{6}\cos\frac{\pi x}{4} \geqslant 0,$$

принадлежащих отрезку $[1991; 2013]$.

$\boxed{9}$

11. (*МГУ, мехмат, 2009*) Найдите все значения аргумента x, при каждом из которых соответствующее значение функции

$$f(x)=\frac{2\cos\frac{\pi(15+x)}{6}+1}{\sqrt{14+5x-x^2}}$$

положительно.

$\boxed{(-2; 1)\cup(5; 7)}$

12. (*МГУ, физический ф-т, 2008*) Найти множество решений неравенства

$$\frac{1}{2}\left(\frac{9x}{\pi}\right)^2 > \cos 3x.$$

Ответ обосновать, используя свойства функций $y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9x}{\pi}\right)^2$ и $y=\cos 3x$.

$\boxed{\left(-\infty; -\frac{\pi}{9}\right)\cup\left(\frac{\pi}{9}; +\infty\right)}$

13. (*МГУ, ВМК, 2006*) Найдите все решения неравенства

$$\operatorname{tg} x > \frac{9 - 3\cos 2x}{3\sin 2x - 2}\,,$$

удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{8} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\left(\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)}$

14. (*МФТИ, 1998*) Решить неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{7 - \cos 4x}{2}} > -2\sin x.$$

$\boxed{\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}}$

15. (*МФТИ, 1998*) Решить неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{5 + 3\cos 4x}{8}} > -\cos x.$$

$\boxed{\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}}$

16. (*МГУ, ВМК, 2008*) Решить неравенство

$$\sqrt{1 - \sin 2x} + |\sin x| \leqslant \cos x.$$

$\boxed{\left[2\pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right],\ n \in \mathbb{Z}}$

17. (*«Ломоносов», 2019, 10–11*) Найдите все решения неравенства:

$$\sin^{2018} x + \cos^{-2019} x \geqslant \cos^{2018} x + \sin^{-2019} x,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

$\boxed{\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right) \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]}$

18. (*«Ломоносов», 2013*) Фигура на координатной плоскости состоит из точек (x, y), удовлетворяющих при любом $t \in \mathbb{R}$ двум неравенствам:

$$x^2 + y^2 < \pi^2 + t^2, \quad \cos y < 2 + \cos 2x + (4\sin t - 1)\cos x - \cos 2t.$$

Найдите площадь этой фигуры.

$\boxed{\pi^3 - 2\pi^2}$

19. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2012*) Найдите суммарную длину отрезков, составляющих решение неравенства

$$|2\sin x + 3\cos x| + |\sin x - 3\cos x| \leqslant 3\sin x$$

на отрезке $[0; 4\pi]$.

$\boxed{2\operatorname{arctg}\frac{9}{7}}$

20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010*) Найдите минимальное натуральное число n, при котором система неравенств

$$\cos x \geqslant \cos\left(x+\frac{1}{8}\right) \geqslant \cos\left(x+\frac{2}{8}\right) \geqslant \ldots \geqslant \cos\left(x+\frac{n}{8}\right)$$

не имеет решений.

$\boxed{27}$

21. (*Всеросс., 2016, МЭ, 11*) Решите неравенство

$$\sin\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x}\cos\frac{x}{x^2+1}>0.$$

$\boxed{(0;+\infty)}$

22. (*ММО, 2014, 11*) Найдите все такие a и b, что $|a|+|b|\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}$ и при всех x выполнено неравенство

$$|a\sin x+b\sin 2x|\leqslant 1.$$

$\boxed{a=\pm\frac{4}{3\sqrt{3}},\ b=\pm\frac{2}{3\sqrt{3}}}$

23. (*Всеросс., 2014, финал, 11*) Существует ли такое положительное число a, что при всех действительных x верно неравенство

$$|\cos x|+|\cos ax|>\sin x+\sin ax\,?$$

$\boxed{\text{Нет}}$