Тригонометрическая окружность

В предыдущей статье «Углы в тригонометрии» мы познакомились с углами произвольной величины и единицами их измерения. Сейчас мы обсудим важное соответствие, которое можно установить между углами и точками тригонометрической окружности. Это соответствие понадобится нам для того, чтобы впоследствии определить тригонометрические функции произвольного угла.

Тригонометрическая окружность — это окружность единичного радиуса на координатной плоскости OXY с центром в начале координат O (рис. 1).

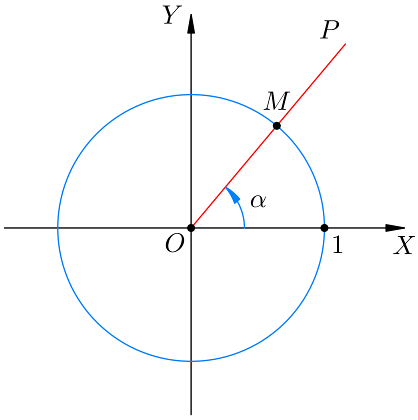

Рис. 1. Тригонометрическая окружность

Началом отсчёта углов (неподвижным лучом) служит положительная полуось OX. Подвижный луч OP пересекает тригонометрическую окружность в единственной точке M. Но каждое положение подвижного луча отвечает некоторому значению угла α. Поэтому ясно, что каждому значению угла α соответствует единственная точка тригонометрической окружности, которую удобно обозначить тем же символом α (рис. 2).

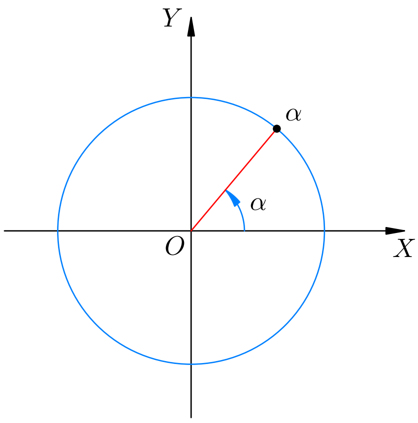

Рис. 2. Угол α и точка α

Итак, каждый угол однозначно определяет одноимённую точку тригонометрической окружности. Обратное оказывается неверным: точка тригонометрической окружности не определяет угол однозначно; каждой точке тригонометрической окружности отвечает бесконечное множество углов, отличающихся друг от друга на целое число полных оборотов подвижного луча в положительном или отрицательном направлении. Об этом мы поговорим подробнее чуть ниже.

А пока давайте отметим на тригонометрической окружности несколько точек, отвечающих некоторым важным углам. Начинаем с нулевого угла (точка 0 с координатами $(1;0)$) и идём против часовой стрелки с шагом, равным прямому углу (рис. 3).

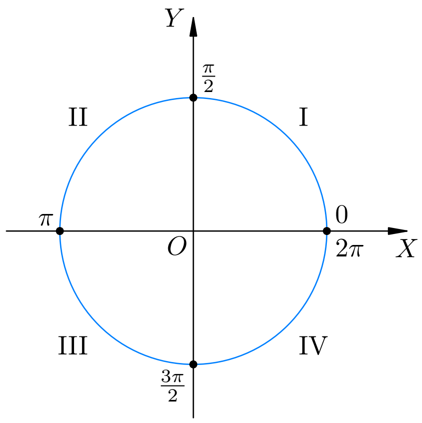

Рис. 3. $0 \to \frac{\pi}{2} \to \pi \to \frac{3\pi}{2} \to 2\pi$

После первого шага попадаем в точку $\pi/2$, которая имеет координаты $(0;1)$. Мы прошли *первую четверть* тригонометрической окружности (или, что то же самое, первую четверть координатной плоскости — римская цифра I на рисунке).

После второго шага попадаем в точку π с координатами $(-1;0)$. Пройдена *вторая четверть* тригонометрической окружности (римская цифра II на рисунке).

После третьего шага попадаем в точку $3\pi/2$ с координатами $(0;-1)$. Пройдена *третья четверть* тригонометрической окружности (римская цифра III на рисунке).

Наконец, после четвёртого шага мы проходим *четвёртую четверть* тригонометрической окружности (римская цифра IV на рисунке) и попадаем в точку 2π, которая совпадает с исходной точкой 0. Круг замкнулся.

Давайте сделаем ещё четыре таких же шага, то есть пятый, шестой, седьмой и восьмой по счёту. Мы пройдём по тем же геометрическим точкам, но только имена у этих точек окажутся другими: $5\pi/2$, 3π, $7\pi/2$ и 4π (рис. 4). Эти новые имена будут соответствовать всё возрастающим значениям угла, который отсчитывается с самого начала — с первого шага.

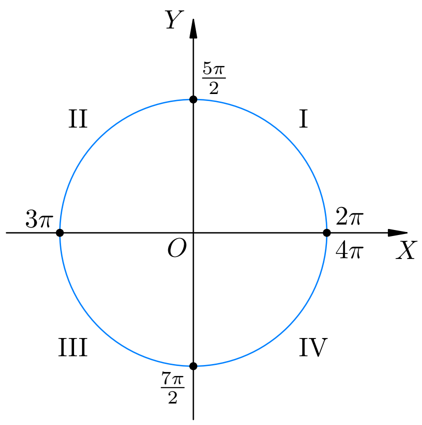

Рис. 4. $2\pi \to \frac{5\pi}{2} \to 3\pi \to \frac{7\pi}{2} \to 4\pi$

В результате этого небольшого «путешествия» устройство тригонометрической окружности становится понятным. Чтобы достичь ещё большей полноты картины, отправимся в сторону отрицательных углов.

Снова начнём с нулевого угла и сделаем четыре шага, равных прямому углу, в направлении по часовой стрелке (рис. 5). Мы последовательно попадём в точки $-\pi/2$, $-\pi$, $-3\pi/2$ и -2π; последняя точка геометрически совпадает с исходной точкой 0.

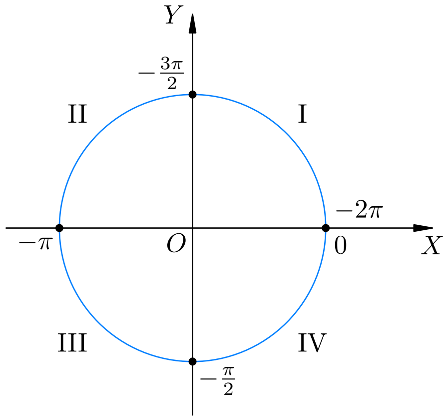

Рис. 5. $0 \to -\frac{\pi}{2} \to -\pi \to -\frac{3\pi}{2} \to -2\pi$

Продолжим движение и сделаем ещё четыре таких же шага. Последовательно окажемся в точках $-5\pi/2$, -3π, $-7\pi/2$ и -4π (рис. 6).

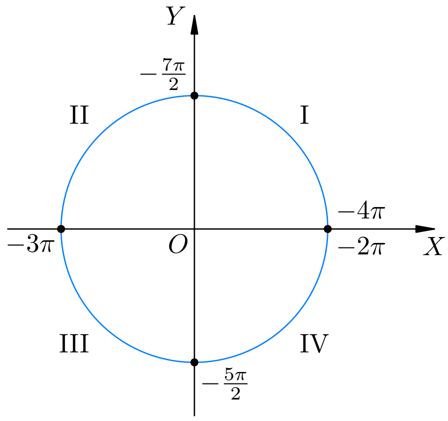

Рис. 6. $-2\pi \to -\frac{5\pi}{2} \to -3\pi \to -\frac{7\pi}{2} \to -4\pi$

Теперь, надеемся, ничего принципиально неясного на тригонометрической окружности для вас не осталось.

Мы уже убедились, что фиксированной точке тригонометрической окружности соответствует много углов. Как описать все эти углы? Начнём с простейшего случая — точки с координатами $(1;0)$, отвечающей нулевому углу (рис. 7).

Как мы видели выше, эта точка отвечает не только углу 0, но и углам 2π, 4π, -2π, -4π. Ясно, что сюда же попадут углы $\pm 6\pi$, $\pm 8\pi$ и так далее. Все такие углы равны целому числу n полных углов 2π, и их можно записать простой формулой: $\alpha = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (напомним, что $\mathbb{Z}$ есть множество целых чисел: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$).

Таким образом, точке с координатами $(1;0)$, отвечающей нулевому углу, соответствует бесконечное множество углов; все эти углы имеют вид $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Данный факт как раз и отражён на рис. 7: рядом с точкой находится формула, описывающая все углы, этой точке соответствующие.

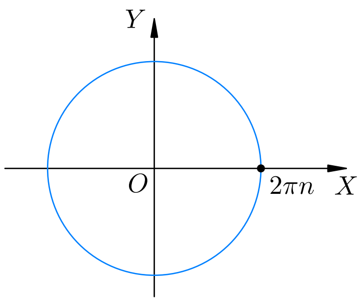

Рис. 7. Углы $2\pi n$

Теперь становится ясно, как описываются все углы, соответствующие произвольной точке тригонометрической окружности. Пусть некоторая точка тригонометрической окружности отвечает углу α_0 (рис. 8). Тогда любой угол α, соответствующий данной точке, отличается от α_0 на целое число полных углов: $\alpha = \alpha_0 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

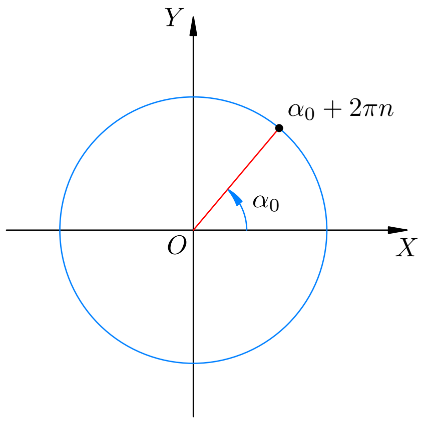

Рис. 8. Углы $\alpha_0 + 2\pi n$

В самом деле, отправляясь из точки α_0 и совершая целое число полных оборотов, мы всё время будем возвращаться в исходную точку, проходя таким образом все соответствующие углы.

Итак, рецепт прост и ясен: *чтобы получить все углы, соответствующие данной точке тригонометрической окружности, нужно взять один из этих углов (неважно какой) и прибавить к нему* $2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

В заключение покажем, как описываются углы, соответствующие диаметральной паре точек (то есть паре точек, служащих концами диаметра окружности). Это понадобится нам впоследствии при решении тригонометрических уравнений.

Пусть α_0 — некоторый угол, соответствующий одной из точек диаметральной пары (рис. 9). Ясно тогда, что все интересующие нас углы α отличаются от α_0 на целое число развёрнутых углов: $\alpha = \alpha_0 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

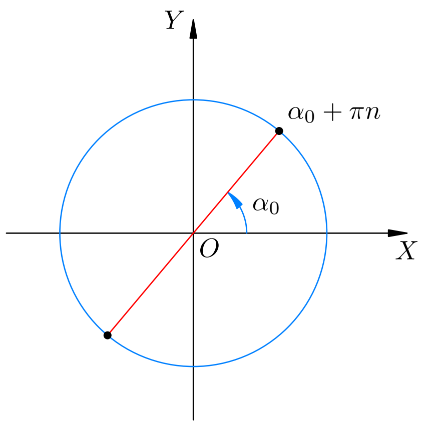

Рис. 9. Углы $\alpha_0 + \pi n$

В самом деле, отправляясь из точки α_0 и совершая целое число полуоборотов, мы всё время будем попадать в точки нашей диаметральной пары, проходя таким образом все соответствующие углы.

Итак: *чтобы получить все углы, соответствующие диаметральной паре точек тригонометрической окружности, нужно взять один из этих углов (неважно какой) и прибавить к нему* πn $(n \in \mathbb{Z})$.

Задачи

1. На тригонометрической окружности покажите (приблизительно) точку α, если соответствующий угол α равен: а) $\pi/7$; б) $2\pi/7$; в) $3\pi/7$; г) $4\pi/7$; д) $5\pi/7$; е) $6\pi/7$.

2. На тригонометрической окружности покажите (приблизительно) точку α, если соответствующий угол α равен: а) $13\pi/9$; б) $-7\pi/4$; в) $22\pi/3$; г) $-47\pi/5$.

3. На тригонометрической окружности изобразите множество точек, отвечающих углам:

а) $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

б) $\pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$;

в) $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n; , n \in \mathbb{Z}$;

г) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

д) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

е) $-\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

ж) $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

з) $\dfrac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$;

и) $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$;

к) $-\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$;

л) $\dfrac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$;

м) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

4. Определите, в какой четверти находится точка тригонометрической окружности, отвечающая углу: а) $28\pi/3$; б) $-52\pi/7$; в) 1; г) 2; д) 3; е) 4; ж) 6; з) 10.

а) третья; б) вторая; в) первая; г) вторая; д) вторая; е) третья; ж) четвёртая; з) третья